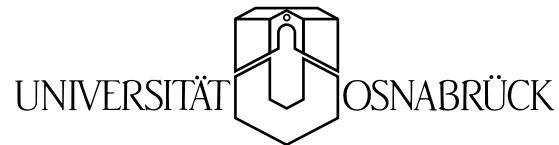

Strahlung und kompakte Objekte in der allgemeinen Relativitätstheorie

Diplomarbeit

**Felix Homann
Fachbereich Physik**

Mai 2000



Inhaltsverzeichnis

Einleitung	4
Notation	6
I. Grundlagen	7
1. Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie	7
1.1. Konzepte und Feldgleichungen	7
1.2. Symmetrien in der allgemeinen Relativitätstheorie	12
1.2.1. Lie-Ableitung und Killing-Vektorfelder	12
1.2.2. Stationäre und statische Metriken	14
1.2.3. Sphärische Symmetrie	15
1.3. Ideale Flüssigkeiten	16
1.4. Strahlung im Gleichgewicht – die Tolman-Gleichung	18
II. Photonensterne	19
2. Feldgleichungen eines Photonengases in einer statischen, sphärisch symmetrischen Raumzeit	19
2.1. Skaleninvarianz und Reduktion der Ordnung	20
3. Lösungen	25
3.1. Exakte Lösungen	25
3.2. Numerische Lösungen	26
3.2.1. Die Lösungen in der reduzierten Darstellung	29
3.2.2. Linearisierung der reduzierten Gleichungen	30
3.3. Die Kleinsche Lösungsklasse	30
3.4. Die Poincaré–Abbildung	33
3.4.1. Numerische Behandlung der Poincaré–Abbildung	33
3.5. Schwarzschild-Approximation	36
3.6. Ein Approximationsverfahren	40
4. Physikalische Eigenschaften	44
4.1. Qualitatives Verhalten der Geodäten	45
4.2. Die Massenfunktionen	47
4.3. Temperatur	51
5. Diskussion	53
A. Polynome 3. Grades in p, q	54

B. Weitere Grundbegriffe der Differentialgeometrie	54
Literatur	60

Einleitung

Eine der überraschendsten Konsequenzen aus Einsteins Relativitätstheorie, ist die mögliche Existenz von Schwarzen Löchern. Wurden sie anfangs noch als unphysikalisch abgelehnt, sind sie heute, obgleich noch nicht nachgewiesen, schon beinahe fester Bestandteil unseres Weltbildes.

Eine der erstaunlichsten Eigenschaften Schwarzer Löcher wurde 1975 von Hawking [1] entdeckt: Sie strahlen ein thermisches Spektrum elektromagnetischer Strahlung ab. Hawking faßte dies in dem Slogan zusammen „Schwarze Löcher sind gar nicht so schwarz“ [2]. Dieses Ergebnis wurde durch die Untersuchung von Quantenfeldern in einer Raumzeit erzielt, die einen Sternenkollaps beschreibt. Es wurde dabei ein semiklassischer Ansatz gemacht.

Ein für die Entstehung der Hawking-Strahlung wesentliches Merkmal Schwarzer Löcher ist der Ereignishorizont. Dieser tritt in der Regel bei der Betrachtung von Vakuumlösungen auf. Strahlen nun aber Schwarze Löcher, so kann von einem Vakuum außerhalb des Schwarzen Loches keine Rede mehr sein. Es stellt sich also die Frage, ob strahlende Schwarze Löcher überhaupt noch für diese Objekte typische Eigenschaften haben.¹

Eine vollständige Betrachtung diese Frage würde aufgrund des quantentheoretischen Charakters der Hawking-Strahlung eine vollständige Quantentheorie der Gravitation voraussetzen. Da diese jedoch noch nicht existiert, ist man leider auf halbklassische Argumente angewiesen. Versuche, die Strahlung in die Analyse der Raumzeit miteinzubeziehen, wurden unter anderem von Zaidi und Gegenberg [3] oder Massar und Parentani [4] unternommen.

In dieser Arbeit werden Strahlungsfelder schließlich innerhalb der allgemeinen Relativitätstheorie rein klassisch behandelt, also durch den Energie-Impuls-Tensor einer idealen Flüssigkeit mit Zustandsgleichung $\rho = 3p$. Die Idee dazu stammte aus der Diplomarbeit von Hauke Hußmann [5], der bei Untersuchungen zu thermodynamischen Kreisprozessen in der Nähe schwarzer Löcher auf das Problem der Rückwirkung der Strahlung auf die Metrik stieß.

Jedoch spielen die oben genannten Überlegungen für diese Arbeit eine nur untergeordnete Rolle. Erste Rechnungen zeigten, daß die (wohlgemerkt numerischen) Lösungen der entsprechenden Feldgleichungen kompakten Charakter haben. Ihre Energie ist konzentriert auf eine Kugelschale. Sie wurden daher in [6] „Photonensterne“ genannt. Dort sind bereits Ergebnisse dieser Diplomarbeit enthalten. Die Eigenschaften dieser kompakten Strahlungsobjekte zu untersuchen, war schließlich Ziel dieser Arbeit.

Es stellte sich heraus, das die Gleichungen bereits 1947 von O. Klein untersucht wurden [7]. Es wurde dort neben einer exakten Lösung eine Klasse von numerischen Lösungen gefunden, die sich von den ersten hier gefundenen Lösungen unterscheiden.

Die exakte Lösung wurde in der Vergangenheit als einfaches Modell eines Neutronensterns diskutiert und hat sogar Einzug in die Lehrbücher gehalten (z. B. [8], [9]). Sie gehört weiterhin einer Klasse von selbstähnlichen statischen Lösungen an, die sich für

¹Oder, in Anlehnung an den Hawkingschen Slogan: *Wenn Schwarze Löcher schon nicht schwarz sind, bleiben sie dann wenigstens noch Löcher?*

jede ideale Flüssigkeit mit einer Zustandsgleichung $\rho = \alpha p$ angeben lassen, (siehe Carr und Coley [10], [11]).

Die Arbeit ist folgendermaßen aufgebaut: Zunächst werden einige Grundbegriffe der Differentialgeometrie und der allgemeinen Relativitätstheorie beschrieben, die schließlich in die Herleitung der Tolman-Gleichung münden, die die Temperaturverteilung eines Photonengases im thermischen Gleichgewicht beschreibt.

Dieses Ergebnis wird dann in den bekannten Ansatz der Einsteinschen Feldgleichungen für eine statische, sphärisch symmetrische ideale Flüssigkeit eingesetzt. Das resultierende Gleichungssystem läßt sich in eine Differentialgleichung für die zeitliche Komponente der Metrik umformen. Es wird eine Skaleninvarianz des Lösungsraumes diskutiert, die zur Reduktion der Gleichung herangezogen wird, und zeigt, daß von einer dreiparametrischen Schar von Lösungen lediglich eine zweiparametrische Schar physikalisch unterscheidbare Lösungen beschreibt.

Es werden Approximationen an die Lösungen besprochen, und schließlich physikalische Eigenschaften der „Photonensterne“ diskutiert.

Notation

Es werden die sogenannte „abstrakte Indexnotation“ (siehe [12]) und die koordinatenfreie Darstellung aus [9] benutzt:

Indexnotation

In der Indexnotation gelten folgende Regeln:

- Lateinische Indizes sind symbolische Indizes, so bezeichnet z. B. $T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}$ einen Tensor vom Typ (k, l) .
- Für Vektoren und 1-Formen werden in der Regel kleine Buchstaben, für Tensoren höherer Stufe große Buchstaben verwendet.
- Griechische Indizes bezeichnen die *Komponenten* eines Tensors bezüglich einer, nicht notwendig näher bestimmten, Basis (e_0, \dots, e_3) . So ist z. B. $T^{\alpha\beta}$ die $(\alpha\beta)$ -Komponente eines Tensors vom Typ $(2, 0)$.
- Sind spezielle Koordinaten gewählt, z. B. Kugelkoordinaten (t, r, ϕ, θ) , so bezeichnet beispielsweise u^t die t -Komponente des Vektors u^a .
- Es gilt die Einsteinsche Summenkonvention: Über gleiche kontra- und kovariante Indizes wird summiert. Dies gilt *nicht* für Indizes wie im vorigen Beispiel²!
- Die Indizes i, j, k sind reserviert für die raumartigen Koordinaten $(1, 2, 3)$, falls definiert.

Koordinatenfreie Darstellung

In der koordinatenfreien Darstellung werden folgende Konventionen benutzt:

- Tensoren jeglicher Stufe werden fett gedruckt.
- Es wird nicht zwischen kontra- und kovarianten „Slots“ unterschieden. Der Tensor wird also als universelle Maschine angesehen, die sowohl auf Formen als auch auf Vektoren wirken kann. Dies entspricht einem Senken und Heben von Indizes „nach Bedarf“.

Es wird weiterhin mit geometrischen Einheiten gearbeitet, also $c = G = 1$.

²Es wird also in $u^r u_r$ nicht summiert

Teil I.

Grundlagen

1. Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie

Die allgemeine Relativitätstheorie ist Einsteins Theorie von Raum, Zeit und Gravitation. Sie beschreibt die Gravitation als Krümmung der Raumzeit. Dabei versteht man unter der Raumzeit die Menge aller physikalischen Vorgänge, genannt „Ereignisse“. Unsere alltägliche Erfahrung lehrt uns, daß wir solche Ereignisse charakterisieren können durch vier Koordinaten, drei räumlicher und eine zeitlicher Natur. Im Gegensatz zur Newtonschen Theorie oder der speziellen Relativitätstheorie zeigt sich aber in der allgemeinen Relativitätstheorie, daß solche Koordinatensysteme nicht global definiert werden können. An die Stelle eines euklidischen Raumes tritt ein neues Konzept, das des (Pseudo-)Riemannschen Raumes. Darunter versteht man eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, auf der eine Metrik definiert ist.

In diesem Teil der Arbeit werden die mathematischen Grundlagen der Differentialgeometrie und ihre Anwendung in der allgemeinen Relativitätstheorie besprochen. In Abschnitt 1.1 werden neben den benötigten mathematischen Begriffen die Einsteinschen Feldgleichungen eingeführt. In Abschnitt 1.2 werden zunächst Symmetrien durch Killing-Felder definiert und schließlich zur Konstruktion des Linienelements einer statischen, sphärisch symmetrischen Raumzeit genutzt. In Abschnitt 1.3 werden einige Eigenschaften idealer Flüssigkeiten hergeleitet, die in Abschnitt 1.4 zur Herleitung der Tolman-Gleichung benötigt werden.

1.1. Konzepte und Feldgleichungen

Es sollen nun die für unsere Zwecke wichtigen Begriffe der Differentialgeometrie kurz erläutert werden. Für detailliertere Betrachtungen sei auf Anhang B verwiesen.

Definition 1. Sei M ein topologischer Raum, $U \subseteq M$ offen und $\phi : U \rightarrow V \in \mathbb{R}^k$ ein Homöomorphismus. Dann heißt (U, ϕ) *Karte* von M .

Dies ist im wesentlichen die mathematische Formulierung dessen, was auch im nicht-mathematischen Sinne mit einer Karte gemeint ist. In der Physik nennt man eine Karte meist einfach ein Koordinatensystem. Wir können ϕ darstellen durch k Funktionen $x^1 \dots x^k$ von U nach \mathbb{R} . Ein Punkt $p \in U$ wird dann abgebildet auf $(x^1(p), \dots, x^k(p))$, oder kurz $x^\mu(p)$.

Eine Menge von Karten kann nun einen Atlas bilden. Voraussetzung dafür ist, daß die Karten miteinander verträglich sind und sie zusammen ein Bild von ganz M ergeben:

Definition 2. Eine Menge $\{(U_i, \phi_i)\}$ von Karten von M heißt C^r -*Atlas* von M , wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. $\bigcup_i U_i = M$.

2. Sei $U_i \cap U_j = \emptyset$. Dann ist $\psi_{ij} = \phi_i \phi_j^{-1}$ eine C^r -Abbildung von $\phi_j(U_i \cap U_j)$ nach $\phi_i(U_i \cap U_j)$.

Ist M mit einem C^r -Atlas versehen, so ist M eine C^r -Mannigfaltigkeit. Sind alle ϕ_i Abbildungen nach \mathbb{R}^m , so heißt m die Dimension von M .

Wir setzen im weiteren einfach hinreichende Differenzierbarkeit voraus und sprechen dann von einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit. Durch die Koordinatenfunktionen ist

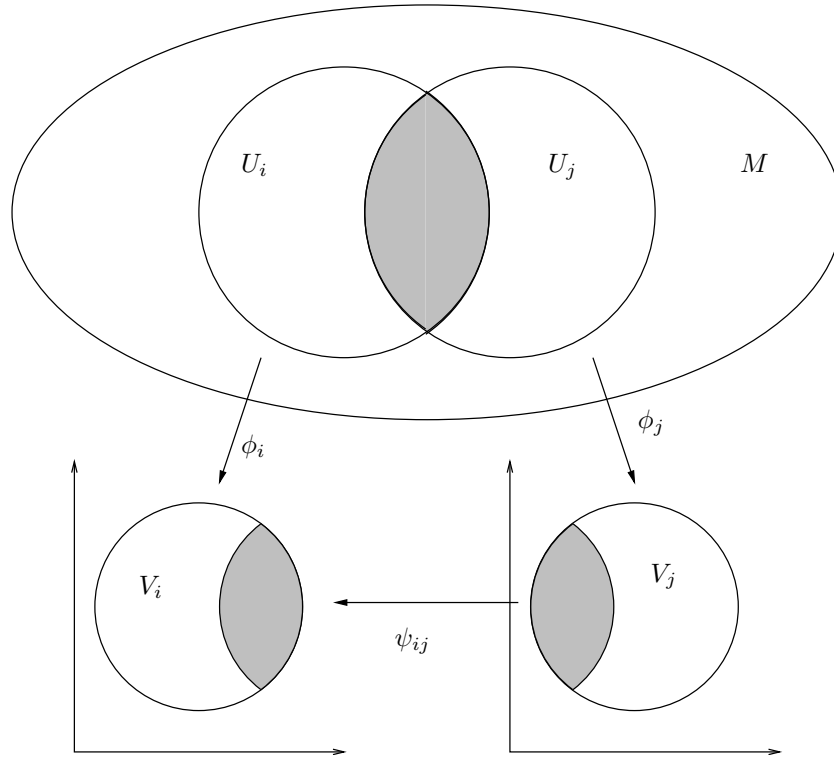


Abbildung 1.1: Die Abbildung ψ_{ij} bildet die Bilder der Schnittmenge $U_i \cap U_j$ differenzierbar aufeinander ab; die Karten sind miteinander „verträglich“.

es möglich, den Begriff der Differenzierbarkeit auf einer Mannigfaltigkeit durch die Differenzierbarkeit im \mathbb{R}^n zu definieren. Die Koordinatenunabhängigkeit der Differenzierbarkeit wird durch die Übergangsfunktionen ψ_{ij} gewährleistet.

Auf Mannigfaltigkeiten lassen sich Vektoren, Dualvektoren und Tensoren einführen. Vektoren werden dabei als Differentialoperatoren betrachtet, Dual- bzw. Kotangentialektoren als lineare Abbildungen eines Vektors nach \mathbb{R} . Ein Tensor vom Typ (q, r) bildet q Kotangentialektoren und r Vektoren nach \mathbb{R} ab. Die Menge der Vektoren in einem Punkt p wird mit $T_p M$, die der Kotangentialektoren mit $T_p^* M$ bezeichnet.

Ist ein Koordinatensystem $\{x^\mu\}$ gegeben, so haben diese Objekte die Darstellungen

- Vektor: $\mathbf{X} = X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} =: X^\mu \mathbf{e}_\mu$,
- Kotangentialektor: $\omega = \omega_\mu \mathbf{d}x^\mu$,

- Tensor: $\mathbf{T} = T^{\mu_1 \dots \mu_q}{}_{\nu_1 \dots \nu_r} \frac{\partial}{\partial x^{\mu_1}} \dots \frac{\partial}{\partial x^{\mu_q}} \mathbf{d}x^{\nu_1} \dots \mathbf{d}x^{\nu_r}$.

Die Geometrie der Raumzeit wird durch einen Metrischen Tensor beschrieben:

Definition 3. Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Eine *Riemannsche Metrik* \mathbf{g} auf M ist ein Tensorfeld vom Typ $(0, 2)$, das in jedem Punkt $p \in M$ die folgenden Bedingungen erfüllt:

- (i) $\mathbf{g}|_p(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = \mathbf{g}|_p(\mathbf{V}, \mathbf{U})$ für alle $\mathbf{U}, \mathbf{V} \in T_p M$,
- (ii) $\mathbf{g}_p(\mathbf{U}, \mathbf{U}) \geq 0$ und $\mathbf{g}_p(\mathbf{U}, \mathbf{U}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{U} = 0$.

Gilt anstelle von (ii)

$$(iia) \quad \mathbf{g}|_p(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = 0 \quad \forall \mathbf{U} \in T_p M \Rightarrow \mathbf{V} = 0,$$

so heißt \mathbf{g} *Pseudo-Riemannsche Metrik*. Das Paar (M, \mathbf{g}) heißt (*Pseudo-*) *Riemannscher Raum*³.

In einer Karte mit Koordinaten $\{x^\mu\}$ hat \mathbf{g} die Darstellung $\mathbf{g} = g_{\mu\nu}(p) \mathbf{d}x^\mu \otimes \mathbf{d}x^\nu$. Man betrachtet $g_{\mu\nu}$ in der Regel als Matrix. Da \mathbf{g} symmetrisch ist, hat \mathbf{g} reelle Eigenwerte, sodaß sich $g_{\mu\nu}$ nach einer geeigneten Transformation als Diagonalmatrix mit Elementen 1 oder -1 schreiben läßt. Die Summe dieser Diagonalelemente nennt man *Signatur* der Metrik. Wir stellen die Metrik in einer Karte auch durch ihr *Linielement* ds^2 dar:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (1.1)$$

Die Raumzeit der allgemeinen Relativitätstheorie ist eine Pseudoriemannsche Mannigfaltigkeit. Ihre Metrik hat die Signatur $+2$. Dies sichert, daß die Raumzeit *lokal* isomorph zum Minkowski-Raum der speziellen Relativitätstheorie ist. Die Metrik ist somit nicht positiv definit. Dadurch lassen sich Vektoren in drei Klassen einteilen:

Ein Vektor \mathbf{X} heißt

- *zeitartig*, wenn $\mathbf{g}(\mathbf{X}, \mathbf{X}) < 0$,
- *raumartig*, wenn $\mathbf{g}(\mathbf{X}, \mathbf{X}) > 0$ und
- *null-* oder *lichtartig*, wenn $\mathbf{g}(\mathbf{X}, \mathbf{X}) = 0$.

Eine Kurve in der Raumzeit heißt zeit-, raum- oder lichtartig, wenn ihr Tangentialvektor überall zeit-, raum- oder lichtartig ist. Für raumartige Kurven definieren wir noch drei wichtige Begriffe

- Bewegt sich der Beobachter auf einer zeitartigen Kurve $c(t)$, und ist T^a der Tangentialvektor an diese Kurve, so zeigt seine Uhr die *Eigenzeit* τ an:

$$\tau = \int (-g_{ab} T^a T^b)^{1/2} dt \quad (1.2)$$

³Wir werden im weiteren das „Pseudo“ weglassen!

- Die Vierergeschwindigkeit des Teilchens auf dieser Kurve ist dann

$$u^a := \frac{dx^a}{d\tau}. \quad (1.3)$$

- Als Viererimpuls eines Teilchens mit Ruhemasse m definieren wir:

$$p^a = mu^a. \quad (1.4)$$

Die Metrik induziert einen Isomorphismus von Kotangentialvektoren und Vektoren⁴. Ist \mathbf{X} ein Vektor, dann ist $\mathbf{g}(\mathbf{X}, \cdot)$ eine lineare Abbildung von Vektoren nach \mathbb{R} , also ein Kotangentialvektor ω_X . Hat \mathbf{X} die Darstellung $\mathbf{X} = X^\mu \mathbf{e}_\mu$, so hat ω_X die Darstellung $\omega_X = g_{\mu\nu} X^\mu \mathbf{d}x^\nu$. Dies ist das bekannte Heben und Senken von Indizes. Man bezeichnet die X^μ als kontravariante, die X_μ als kovariante Komponenten des Vektors \mathbf{X} . Auf Mannigfaltigkeiten kann man ein *kovariante Ableitung* bzw. einen *affinen Zusammenhang* definieren.

Definition 4. Eine *kovariante Ableitung*, oder auch ein *affiner Zusammenhang*, ∇ ist eine Abbildung $\nabla: \mathcal{H}(M) \times \mathcal{H}(M) \rightarrow \mathcal{H}(M)$, $(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$, mit folgenden Eigenschaften:

$$\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z \quad (1.5a)$$

$$\nabla_{(X+Y)}Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z \quad (1.5b)$$

$$\nabla_{(fX)}Y = f \nabla_X Y \quad (1.5c)$$

$$\nabla_X(fY) = X[f]Y + f \nabla_X Y, \quad (1.5d)$$

wobei $f \in \mathcal{F}(M)$ und $X, Y, Z \in \mathcal{H}(M)$.⁵

Mit Hilfe der kovarianten Ableitung können wir den *Paralleltransport* eines Vektors entlang einer Kurve definieren:

Definition 5. Sei $c: (a, b) \rightarrow M$ eine Kurve in M , \mathbf{X} ein Vektorfeld auf zumindest dem Bild von c , und \mathbf{V} das Vektorfeld der Tangentenvektoren an c . \mathbf{X} wird entlang $c(t)$ *parallel verschoben*, wenn gilt

$$\nabla_{\mathbf{V}} \mathbf{X} = 0 \quad \text{für alle } t \in (a, b). \quad (1.6)$$

Wird \mathbf{V} selbst entlang c parallel verschoben, also $\nabla_{\mathbf{V}} \mathbf{V} = 0$, so heißt c *Geodäte*.

⁴Es gibt in der theoretischen Physik eine Vielzahl von Strukturen auf Mannigfaltigkeiten. So hat z. B. der Phasenraum der klassischen Mechanik die natürliche Struktur einer symplektischen Mannigfaltigkeit (siehe z. B. [13]). Die zusätzliche Struktur stellt in der Regel einen Isomorphismus zwischen Vektoren und Dualvektoren her.

⁵Dabei ist $\mathcal{H}(M)$ die Menge der Vektorfelder auf M , und $X[f]$ bedeutet die Anwendung des Vektors (also eines Differentialoperators) auf die Funktion f .

Die Änderung von \mathbf{V} entlang $c(t)$ ist bei einer Geodäten also parallel zu \mathbf{V} . In diesem Sinne sind die Geodäten die natürliche Verallgemeinerung von Geraden.

In der allgemeinen Relativitätstheorie wird die Bewegung freier Teilchen durch Geodäten beschrieben. Massive Teilchen folgen zeitartigen, masselose Teilchen folgen lichtartigen Geodäten.

Ist eine Karte mit Koordinaten $\{x^\mu\}$ und Basisvektoren $\{\mathbf{e}_\mu\}$ gegeben, so ist $\nabla_\mu \mathbf{e}_\nu := \nabla_{\mathbf{e}_\mu} \mathbf{e}_\nu$ wieder ein Vektor und läßt sich in der Basis expandieren

$$\nabla_\mu \mathbf{e}_\nu = \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \mathbf{e}_\lambda. \quad (1.7)$$

Die so definierten m^3 ($m = \dim M$) Funktionen werden *Christoffel-Symbole* genannt. Für die λ -Komponente der kovarianten Ableitung eines Vektors $\mathbf{X} = X^\mu \mathbf{e}_\mu$ folgt dann aus den Regeln (1.5) direkt

$$\nabla_\nu \mathbf{X} = X^\mu \nabla_\nu \mathbf{e}_\mu + \mathbf{e}_\mu \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\nu} = X^\mu \Gamma^\lambda_{\nu\mu} \mathbf{e}_\lambda + \mathbf{e}_\lambda \frac{\partial X^\lambda}{\partial x^\nu}, \quad (1.8)$$

also

$$(\nabla_\nu \mathbf{X})^\lambda = X^\mu \Gamma^\lambda_{\nu\mu} + \frac{\partial X^\lambda}{\partial x^\nu}. \quad (1.9)$$

Definieren wir zusätzlich die kovariante Ableitung einer Funktion f durch

$$\nabla_X f := X[f] \quad (1.10)$$

und fordern für die kovariante Ableitung von Tensorprodukten eine Leibniz-Regel

$$\nabla_X(T_1 \otimes T_2) = (\nabla_X T_1) \otimes T_2 + T_1 \otimes (\nabla_X T_2), \quad (1.11)$$

so können wir die kovariante Ableitung beliebiger Tensoren auf die von Vektoren zurückführen. Für die ν -Komponente eines Kotangententialvektors $\omega = \omega_\mu \mathbf{d}x^\mu$ folgt z. B.

$$(\nabla_\nu \omega)_\mu = \frac{\partial \omega_\mu}{\partial x^\nu} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \omega_\lambda. \quad (1.12)$$

In der allgemeinen Relativitätstheorie wird der *Levi-Civita-Zusammenhang* benutzt. Er ist eindeutig definiert durch die Forderung nach Invarianz der Metrik unter Paralleltransport und Torsionsfreiheit des Zusammenhangs. Die Christoffelsymbole des Levi-Civita-Zusammenhangs lassen sich aus der Metrik bestimmen durch

$$\Gamma^c_{ab} = \frac{1}{2} g^{cd} (\partial_a g_{bd} + \partial_b g_{ad} - \partial_d g_{ab}). \quad (1.13)$$

Die Krümmung der Raumzeit wird beschrieben durch den Riemannschen Krümmungstensor \mathbf{R} . Er ist definiert durch⁶

$$\mathbf{R}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \omega) := \langle \omega, \nabla_{\mathbf{X}} \nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{Z} - \nabla_{\mathbf{Y}} \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Z} \rangle, \quad (1.14)$$

⁶Zur Definition des inneren Produktes $\langle \cdot, \cdot \rangle$ siehe B

oder in Indexnotation

$$R_{abc}{}^d \omega_d := \nabla_a \nabla_b \omega_c - \nabla_b \nabla_a \omega_c, \quad \omega \in \Omega^1(M). \quad (1.15)$$

Durch Kontraktion lassen sich aus dem Riemannschen Krümmungstensor zwei weitere wichtige Größen definieren, der *Ricci-Tensor* R_{ac} :

$$R_{ac} = R_{abc}{}^b \quad (1.16)$$

und die *skalare Krümmung* R :

$$R := R_a{}^a \equiv R_{ab} g^{ba}. \quad (1.17)$$

Damit wären alle nötigen mathematischen Begriffe eingeführt.

Wie oben bereits erwähnt, werden die Geodäten der Raumzeit mit der freien Bewegung von Probeteilchen identifiziert. Die Geometrie der Raumzeit bestimmt also die Bewegung. Die Geometrie der Raumzeit ihrerseits wird durch die Energieverteilung innerhalb der Raumzeit bestimmt. Dieser Zusammenhang wird durch die Einsteinschen Feldgleichungen hergestellt.

$$G_{ab} \equiv R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} = 8\pi T_{ab}. \quad (1.18)$$

G_{ab} heißt *Einstein-Tensor*, T_{ab} ist der Energie-Impuls-Tensor der Raumzeit.

Die Gleichung (1.18) stellt ein nichtlineares System gekoppelter Differentialgleichungen für die Metrik der Raumzeit dar, die als Gravitationsfeld interpretiert wird. Der Energie-Impuls-Tensor enthält als Quellterm der Metrik die Informationen über die Verteilung von Energien, Impulsen und Spannungen innerhalb der Raumzeit. In ihm sind sämtliche Energieformen zu berücksichtigen, also auch die Gravitationsenergie. Dies führt zur Nichtlinearität der Feldgleichungen.

Die exakte Lösung der Feldgleichungen ist in der Regel nur für Energie-Impuls-Tensoren möglich, die einen hohen Grad an Symmetrie aufweisen. Im folgenden Abschnitt werden wir erörtern, auf welche Weise Symmetrien in der allgemeinen Relativitätstheorie formuliert und genutzt werden können.

1.2. Symmetrien in der allgemeinen Relativitätstheorie

Einer der Kerngedanken der allgemeinen Relativitätstheorie ist die Koordinatenunabhängigkeit sämtlicher physikalisch relevanter Aussagen. Dies zwingt dazu, auch Symmetrien grundlegend geometrisch, also koordinatenfrei zu formulieren. Die zentralen Hilfsmittel sind dabei die *Lie-Ableitung* und *Killing-Vektorfelder*.

1.2.1. Lie-Ableitung und Killing-Vektorfelder

Unter dem Begriff einer physikalischen Symmetrie verstehen wir üblicherweise, daß sich eine physikalische Eigenschaft unter einer Transformation, Bewegung oder ähnlichem

nicht ändert. In der allgemeinen Relativitätstheorie sind *Isometrien* von besonderer Bedeutung, d. h. Transformationen, die die Metrik invariant lassen. Wir werden diese Idee im folgenden mathematisch formulieren.

Zunächst stellen wir fest, daß ein Vektorfeld \mathbf{V} als Differentialoperator auf M durch seine Integralkurven eine einparametrische Gruppe von Diffeomorphismen erzeugt. In einer Koordinatenbasis $\{x^\mu\}$ müssen die Integralkurven die Gleichungen

$$\frac{dx^\mu}{dt} = V^\mu(x^1, \dots, x^n) \quad (1.19)$$

erfüllen ($\mathbf{V} = V^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$). Da es sich hierbei um ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen handelt, gibt es zu $p \in M$ eine eindeutige Integralkurve mit $x^\mu(t=0) = x^\mu(p)$. Für eine in p startende Integralkurve definieren wir $\phi_t(p)$ als den Punkt auf der Integralkurve mit Parameter t .

Wir möchten nun untersuchen, wie sich ein Tensorfeld \mathbf{T} entlang dieser Integralkurve ändert. Da wir Tensoren an verschiedenen Punkten der Mannigfaltigkeit nicht subtrahieren können, müssen wir den Tensor $T|_{\phi_t(p)}$ auf geeignete Weise entlang der Integralkurve „an die Stelle p “ zurücktransportieren. Diese „geeignete Weise“ wird durch die $*$ -Abbildung (siehe Anhang B) bereitgestellt.

Mittels der durch \mathbf{V} erzeugten einparametrischen Gruppe von Diffeomorphismen ϕ_t können wir nun die *Lie-Ableitung* $\mathcal{L}_{\mathbf{V}}$ definieren durch

$$\mathcal{L}_{\mathbf{V}}\mathbf{T} = \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{\phi_{-t}^*\mathbf{T} - \mathbf{T}}{t} \right\}, \quad \mathbf{T} \in \mathcal{T}(M). \quad (1.20)$$

Einen besser handzuhabenden Ausdruck für die Lie-Ableitung findet man, wenn man $\mathcal{L}_{\mathbf{V}}\mathbf{W}$, $\mathbf{W} \in \mathcal{H}(M)$, in einem Koordinatensystem mit $\mathbf{V} = \frac{\partial}{\partial x^\sigma}$ betrachtet. Es ist dann

$$(\phi_{-t}^*\mathbf{W})^\nu = W^\mu \frac{\partial \phi_{-t}^\nu}{\partial x^\mu} \Big|_{\phi_{-t}(p)} \quad (1.21)$$

$$= W^\sigma \Big|_{\phi_{-t}(p)}, \quad (1.22)$$

und somit

$$(\mathcal{L}_{\mathbf{V}}\mathbf{W})^\mu = \frac{\partial W^\mu}{\partial x^0}. \quad (1.23)$$

Es ist aber auch

$$[\mathbf{V}, \mathbf{W}]^\mu = \left(V^\nu \frac{\partial W^\mu}{\partial x^\nu} - W^\nu \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\nu} \right) \quad (1.24)$$

$$= \frac{\partial W^\mu}{\partial x^0}. \quad (1.25)$$

Da sowohl der Kommutator als auch die Lie-Ableitung koordinatenunabhängig definiert sind, folgt

$$\mathcal{L}_{\mathbf{V}}\mathbf{W} = [\mathbf{V}, \mathbf{W}]. \quad (1.26)$$

Aus $\nabla_{\mathbf{V}}f = \mathbf{V}[f]$ folgt noch $[\mathbf{V}, \mathbf{W}] = \nabla_{\mathbf{V}}\mathbf{W} - \nabla_{\mathbf{W}}\mathbf{V}$, also

$$\mathcal{L}_{\mathbf{V}}\mathbf{W} = \nabla_{\mathbf{V}}\mathbf{W} - \nabla_{\mathbf{W}}\mathbf{V}. \quad (1.27)$$

Unter Ausnutzung der Leibniz-Regel läßt sich zeigen

$$\mathcal{L}_{\mathbf{V}}g_{ab} = \nabla_a V_b + \nabla_b V_a. \quad (1.28)$$

Von besonderem Interesse sind Vektorfelder, die eine Isometrie erzeugen, also $\phi_t^* g_{ab} = g_{ab}$. Das Vektorfeld ξ^a , das diese Isometrie erzeugt, genügt dann der Gleichung $\mathcal{L}_{\xi^a} g_{ab} = 0$, oder ausgedrückt durch die kovariante Ableitung

$$\nabla_a \xi_b + \nabla_b \xi_a = 0. \quad (1.29)$$

Dies ist die *Killing-Gleichung*. Die Vektorfelder, die einer Killing-Gleichung genügen heißen *Killing-Vektorfelder*. Linearkombinationen von Killing-Vektorfeldern sind wieder Killing-Vektorfelder, wie auch der Kommutator zweier Killing-Vektorfelder. Es gibt somit unendlich viele Killing-Vektorfelder. Die Anzahl der linear unabhängigen Killing-Vektorfelder ist aber in einer n -dimensionalen Mannigfaltigkeit auf $n(n+1)/2$ beschränkt. Mannigfaltigkeiten mit der Maximalzahl an unabhängigen Killing-Feldern heißen *maximal symmetrisch*.

Killing-Felder definieren Erhaltungsgrößen der Bewegung auf Geodäten:

Sei \mathbf{V} ein Killing-Vektorfeld, γ eine Geodäte mit Tangentenvektor \mathbf{U} . Dann ist $\mathbf{g}(\mathbf{U}, \mathbf{V})$ entlang der Geodäte konstant, denn es gilt

$$\nabla_{\mathbf{U}}\mathbf{g}(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = \nabla_{\mathbf{U}}U^a V_a \quad (1.30)$$

$$= V_a \nabla_{\mathbf{U}}U^a + U^a \nabla_{\mathbf{U}}V_a. \quad (1.31)$$

Der erste Term verschwindet aufgrund der Geodätengleichung, für den zweiten gilt

$$U^a \nabla_{\mathbf{U}}V_a = U^a U^b \nabla_b V_a = \frac{1}{2} U^a U^b (\nabla_b V_a + \nabla_a V_b). \quad (1.32)$$

Somit verschwindet auch der zweite Term aufgrund der Killing-Gleichung. Wir werden dies bei der Untersuchung des qualitativen Verhaltens der Geodäten unserer Lösungen benutzen.

Wir werden gleich mit Hilfe von Killing-Feldern statische und sphärisch symmetrische Raumzeiten definieren. Dabei folgen wir im wesentlichen [12].

1.2.2. Stationäre und statische Metriken

Eine Raumzeit heißt *stationär*, wenn sie ein zeitartiges Killingvektorfeld ξ^a besitzt. Es existiert dann (und nur dann!)⁷ eine einparametrische Gruppe von Isometrien, ϕ_t , mit zeitartigen Orbits. Existiert zusätzlich eine zu den Orbits von ϕ_t orthogonale raumartige

⁷Dies geht aus dem Satz von Froebenius hervor, siehe z. B. [12]

Hyperfläche Σ , so heißt die Raumzeit *statisch*. Wir wollen nun das Linienelement einer statischen Raumzeit konstruieren:

Es sei ξ^a ein hyperflächenorthogonales, zeitartiges Killingvektorfeld, Σ die entsprechende Hyperfläche und $\xi^a \neq 0$ auf Σ . In einer Umgebung U von Σ existieren dann für jeden Punkt p genau ein $\hat{x} \in \Sigma$ und ein $t \in \mathbb{R}$ mit $\phi_t(\hat{x}) = p$. In dieser Umgebung wählen wir zunächst beliebige Koordinaten $\{x^i\}$ auf Σ . Ein Punkt $p \in U$ wird dann vollständig bestimmt durch die Koordinaten $\{\hat{x}^i\}$ und den Killingparameter t . Sei nun Σ_t die Menge aller Punkte mit „Killing-Koordinate“ t . Σ_t ist das Bild von Σ unter der Isometrie ϕ_t und somit ebenfalls orthogonal zu ξ^a . Folglich hat die Metrik in diesen Koordinaten die Form

$$ds^2 = -V^2(x^1, x^2, x^3)dt^2 + h_{ij}(x^1, x^2, x^3)dx^i dx^j \quad . \quad (1.33)$$

Dabei ist $V^2 = -\xi_a \xi^a$. Die Orthogonalität von ξ^a und Σ schlägt sich im Fehlen von gemischten $dt dx^i$ -Termen nieder.

1.2.3. Sphärische Symmetrie

Enthält die Isometriegruppe einer Raumzeit eine zu $SO(3)$ isomorphe Untergruppe, und sind die Orbits dieser Untergruppe 2-Sphären, so heißt die Raumzeit *sphärisch symmetrisch*. Die $SO(3)$ -Isometrien werden dann physikalisch als Rotationen interpretiert. Die Konstruktion der Metrik einer solchen Raumzeit ist analog zum vorigen Abschnitt.

Die Metrik der gesamten Raumzeit induziert eine Metrik auf jeder Orbit-Sphäre. Aufgrund ihrer Symmetrie, muß es sich dabei um ein Vielfaches der Metrik einer Einheitskugel handeln, also der Levi-Civita-Metrik. Diese läßt sich vollständig durch den Flächeninhalt A der jeweiligen 2-Sphäre beschreiben. Man führt nun die „radiale“ Koordinate als Funktion von A ein:

$$r := \sqrt{A/4\pi} \quad (1.34)$$

Man beachte, daß diese radiale Koordinate anschaulich mit einem Radius nichts zu tun haben muß, da zum einen ein Mittelpunkt nicht unbedingt existiert, zum anderen aber auch, und das ist das Wesen der Relativitätstheorie, ein *räumlicher* Abstand eben keine rein geometrische, also koordinatenunabhängige Bedeutung hat.

Sei nun eine sphärisch symmetrische Raumzeit zusätzlich statisch, und sei das statische Killingfeld⁸ ξ^a eindeutig. Dann ist ξ^a invariant unter allen Rotationen. Nun existiert aber auf S^2 kein nichtverschwindendes, unter ganz $SO(3)$ invariantes Vektorfeld. Folglich muß die Projektion von ξ^a auf die Orbit-2-Sphären verschwinden. Also sind die Orbit-2-Sphären orthogonal zu ξ^a , und liegen vollständig in Σ_t . Zur Konstruktion von Koordinaten für die gesamte Raumzeit wählt man zunächst eine Sphäre S_0^2 in Σ_t und definiert auf ihr Kugelkoordinaten (θ, ϕ) . Man betrachtet nun die zu S_0^2 orthogonalen, raumartigen Geodäten als Kurven konstanter (θ, ϕ) , und überträgt so die Koordinaten

⁸In der englischsprachigen Literatur wird so etwas gerne als „misuse of language“ bezeichnet, und das zurecht. Nicht das Killingfeld ist statisch, sondern gemeint ist natürlich das hyperflächenorthogonale, zeitartige Killingfeld, das die statische Symmetrie induziert. Nichtsdestotrotz wird dieses hier weiterhin einfach „statisches Killingfeld“ genannt.

von S_0^2 auf die übrigen Kugeln in Σ_t . Sofern $\nabla_a r \neq 0$, kann man (r, θ, ϕ) als Koordinaten auf Σ_t wählen. Schließlich wählt man (t, r, θ, ϕ) als Koordinaten auf der gesamten Raumzeit, wobei t wie im vorigen Abschnitt konstruiert wird. Das Linienelement einer beliebigen statischen, sphärisch symmetrischen Raumzeit hat in diesen Koordinaten dann die einfache Form

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + h(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad , \quad (1.35)$$

oder abgekürzt

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + h(r)dr^2 + r^2d\Omega^2 \quad . \quad (1.36)$$

Für spätere Rechnungen benötigen wir noch das Christoffel-Symbol $\Gamma^t{}_{rt}$. Dazu führen wir zunächst zwei neue Funktionen $\Phi(r)$ und $\Lambda(r)$ ein:

$$g_{tt} = -f(r) =: -e^{2\Phi} \quad , \quad (1.37)$$

$$g_{rr} = h(r) =: e^{2\Lambda} \quad , \quad (1.38)$$

und erhalten somit:

$$ds^2 = -e^{2\Phi}dt^2 + e^{2\Lambda}dr^2 + r^2d\Omega^2 \quad (1.39)$$

Mittels der allgemeinen Formel

$$\Gamma^c{}_{ab} = \frac{1}{2}g^{cd}(\partial_a g_{bd} + \partial_b g_{ad} - \partial_d g_{ab}) \quad (1.40)$$

läßt sich $\Gamma^t{}_{rt}$ dann leicht berechnen:

$$\Gamma^t{}_{rt} = \frac{1}{2}g^{td}(\partial_r g_{td} + \partial_t g_{rd} - \partial_d g_{rt}) \quad (1.41a)$$

$$= \frac{1}{2}g^{tt}\partial_r g_{tt} \quad (1.41b)$$

$$= \frac{1}{2}e^{-2\Phi(r)}\partial_r e^{2\Phi(r)} \quad (1.41c)$$

$$= \Phi_{,r} \quad . \quad (1.41d)$$

1.3. Ideale Flüssigkeiten

Wir betrachten Strahlungsfelder als ideale Flüssigkeiten. Damit bezeichnet man Systeme nichtwechselwirkender Teilchen mit isotroper Impulsverteilung. Beschrieben werden sie durch einen Energie-Impuls-Tensor der Form

$$\mathbf{T} = pg + (\rho + p)\mathbf{u} \otimes \mathbf{u} \quad , \quad (1.42a)$$

oder in Indexnotation

$$T_{ab} = pg_{ab} + (\rho + p)u_a u_b \quad . \quad (1.42b)$$

Dabei sei \mathbf{u} die Vierer-Geschwindigkeit der Flüssigkeit bzw. eines Flüssigkeitelementes.

Betrachten wir eine ideale Flüssigkeit mit Energie-Impuls-Tensor (1.42). Dann gilt:

$$0 = \nabla_a T^{ab} \quad (1.43a)$$

$$= \nabla_a [p g^{ab} + (\rho + p) u^a u^b] \quad (1.43b)$$

$$= (\nabla_a p) g^{ab} + [\nabla_a (\rho + p)] u^a u^b + (\rho + p) [(\nabla_a u^a) u^b + u^a \nabla_a u^b] \quad (1.43c)$$

$$= \nabla^b p + [\nabla_{\mathbf{u}} \rho + \nabla_{\mathbf{u}} p + (\rho + p) \nabla_a u^a] u^b + (\rho + p) \nabla_{\mathbf{u}} u^b \quad (1.43d)$$

Für die Projektion entlang \mathbf{u} folgt dann (mit $u_b \nabla_{\mathbf{u}} u^b = 0$):

$$0 = u_b \nabla_a T^{ab} \quad (1.44a)$$

$$= -[\nabla_{\mathbf{u}} \rho + \nabla_{\mathbf{u}} p + (\rho + p) \nabla_a u^a] + u_b g^{ab} \nabla_a p \quad (1.44b)$$

$$= -\nabla_{\mathbf{u}} \rho - (\rho + p) \nabla_a u^a \quad (1.44c)$$

Kontrahiert man (1.44c) mit dem Tensor $\pi := \mathbf{g} + \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}$, so erhält man die zu \mathbf{u} senkrechten Komponenten von $\nabla \cdot \mathbf{T}$:

$$0 = \pi_{cb} \nabla_a T^{ab} \quad (1.45a)$$

$$= g_{cb} (1.43d) + u_c (1.44c) \quad (1.45b)$$

$$= [\nabla_{\mathbf{u}} \rho + \nabla_{\mathbf{u}} p + (\rho + p) \nabla_a u^a] u_c + g^a_c \nabla_a p + (\rho + p) g_{cb} u^a \nabla_a u^b - [\nabla_{\mathbf{u}} \rho + (\rho + p) \nabla_a u^a] u_c \quad (1.45c)$$

$$= (\nabla_{\mathbf{u}} p) u_c + g^a_c \nabla_a p + (\rho + p) g_{cb} \nabla_{\mathbf{u}} u^b \quad (1.45d)$$

$$= (\nabla_{\mathbf{u}} p) u_c + \nabla_c p + (\rho + p) \nabla_{\mathbf{u}} u_c \quad (1.45e)$$

Dies ist die Euler-Gleichung der relativistischen Hydrodynamik. Sie ist von großer Allgemeinheit, und muß von jeder idealen Flüssigkeit erfüllt werden. Stärkere Aussagen erhält man, wenn weitere Bedingungen an die Metrik gestellt werden.

Betrachten wir den Fall einer idealen Flüssigkeit in einer statischen Raumzeit. Die Metrik einer solchen Raumzeit läßt sich

$$ds^2 = e^{\Phi(x)} dt^2 + g_{ij}(x) dx^i dx^j \quad (1.46)$$

schreiben, wobei x die Raumkoordinaten x^1, x^2, x^3 symbolisiere. Da die Flüssigkeit in diesen Koordinaten ruht, verschwinden die „räumlichen“ Komponenten von \mathbf{u} :

$$u^i = \frac{dx^i}{d\tau} = 0 \quad . \quad (1.47)$$

Dabei sei τ die Eigenzeit der Flüssigkeit. Durch die Normierung der Vierer-Geschwindigkeit,

$$-1 = g_{ab} u^a u^b = g_{tt} u^t u^t = -e^{2\Phi} u^t u^t \quad , \quad (1.48)$$

wird u^t bestimmt

$$u^t = \frac{dt}{d\tau} = e^{-\Phi} \quad (1.49)$$

und somit schließlich \mathbf{u} :

$$\mathbf{u} = e^{-\Phi} \frac{\partial}{\partial t} \quad . \quad (1.50)$$

Dieses Ergebnis wird bei der Herleitung der Tolman-Gleichung benötigt.

1.4. Strahlung im Gleichgewicht – die Tolman-Gleichung

Die Tolman-Gleichung beschreibt ein Photonengas im thermischen Gleichgewicht in einer statischen Raumzeit. Betrachten wir eine Metrik mit Linienelement

$$ds^2 = e^{\Phi(x)} dt^2 + g_{ij}(x) dx^i dx^j \quad , \quad (1.51)$$

wobei x die Raumkoordinaten x^1, x^2, x^3 symbolisiere. Die i -Komponente von (1.45e) lautet dann

$$(\rho + p)\nabla_{\mathbf{u}}u_i = -(\nabla_{\mathbf{u}}p)u_i - \nabla_i p \quad (1.52)$$

Der erste Term der rechten Seite verschwindet, da $\nabla_{\mathbf{u}}p = u^\alpha p_{,\alpha} = u^t p_{,t}$ und in einer statischen Metrik $\partial_t p = 0$ gelten muß. Der zweite Term, $\nabla_i p$, ist nichts anderes als $p_{,i}$. Die linke Seite (LS) läßt sich mit (1.50) vereinfachen

$$\text{LS} = (\rho + p)u^\alpha u_{i;\alpha} = (\rho + p)u^t u_{i;t} = (\rho + p)u^t (u_{i,t} - \Gamma^{\nu}_{ti} u_\nu) \quad . \quad (1.53)$$

Da $\partial_t u = 0$ und lediglich die t -Komponente von \mathbf{u} von Null verschieden ist folgt:

$$\text{LS} = -(\rho + p)u^t u_t \Gamma^t_{ti} \quad . \quad (1.54)$$

Das Christoffel-Symbol wurde bereits in Abschnitt 1.2.3 berechnet (siehe (1.41)). Zusammen mit $u^t u_t = -1$ läßt sich (1.52) schließlich schreiben

$$(\rho + p)\Phi_{,i} = p_{,i} \quad . \quad (1.55)$$

Mittels der Zustandsgleichung für Plancksche Strahlung

$$\rho = 3p \quad (1.56)$$

wird daraus

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x^i} = -\frac{1}{4} \frac{\partial \ln p}{\partial x^i} \quad . \quad (1.57)$$

Das bedeutet

$$e^{\Phi} p^{1/4} = \text{const.} \quad , \text{ bzw.} \quad (1.58)$$

$$\sqrt{g_{tt}} p^{1/4} = \text{const.} \quad (1.59)$$

Wird nun noch das Stefan-Boltzmann-Gesetz $p = \text{const.} T^4$ berücksichtigt, so erhält man die Tolman-Gleichung

$$T \sqrt{g_{tt}} = \text{const.} \quad (1.60)$$

Teil II.

Photonensterne

Wir werden nun die Eigenschaften (numerischer) Lösungen der Einsteinschen Feldgleichungen betrachten, für den Fall, daß der Energie-Impuls-Tensor ein statisches, sphärisch symmetrisches Photonengas beschreibt. Es zeigt sich, daß die Lösungen kompakten Charakter besitzen, d. h. ihre Energie ist auf eine Kugelschale konzentriert. Wir werden die Lösungen daher als „Photonensterne“ bezeichnen. Die 3-dimensionale Lösungsmenge kann auf eine 2-parametrische Schar von physikalisch unterschiedlichen Lösungen reduziert werden.

2. Feldgleichungen eines Photonengases in einer statischen, sphärisch symmetrischen Raumzeit

Wir wollen nun die Einsteinschen Feldgleichungen lösen. Als Quellterm soll der Energie-Impuls-Tensor einer idealen Flüssigkeit dienen. Das thermische Gleichgewicht wird mittels der Tolman-Gleichung berücksichtigt.

Für ideale Flüssigkeiten in statischen und kugelsymmetrischen Raumzeiten reduzieren sich die Feldgleichungen in den Koordinaten aus 1.2.3 und unter Berücksichtigung der Zustandsgleichung $\rho = 3p$ auf die Form (siehe [12] 6.2.3-6.2.5)⁹:

$$8\pi\rho = \frac{h'}{rh^2} + \frac{h-1}{hr^2} \quad (2.1a)$$

$$8\pi p = \frac{8\pi}{3}\rho = \frac{f'}{rfh} - \frac{h-1}{hr^2} \quad (2.1b)$$

$$16\pi p = \frac{16\pi}{3}\rho = \frac{f'}{rfh} - \frac{h'}{rh^2} + \frac{1}{\sqrt{fh}} \frac{d}{dr} \left(\frac{f'}{\sqrt{fh}} \right) \quad (2.1c)$$

Die Tolman-Gleichung (1.60) gilt für statische Raumzeiten und kann somit zur Reduktion des Gleichungssystems (2.1) herangezogen werden. Mittels des Stefan-Boltzmann-Gesetzes

$$\rho \propto T^4 \quad (2.2)$$

folgt die zur Tolman-Gleichung äquivalente Gleichung

$$\rho(r) = \frac{\rho_1}{f^2(r)} \quad (2.3)$$

Wir führen nun noch die Konstante C ein,

$$\rho_1 = \frac{C}{8\pi} \quad (2.4)$$

⁹Da der Weg zu diesen Gleichungen einerseits sehr direkt, andererseits aber auch sehr unübersichtlich ist, soll hier auf eine Herleitung verzichtet werden.

und erhalten aus (2.1a) und (2.1b) das System

$$\frac{C}{f^2} = \frac{h'}{rh^2} + \frac{h-1}{hr^2} \quad (2.5a)$$

$$\frac{C}{3f^2} = \frac{f'}{rfh} - \frac{h-1}{hr^2} \quad . \quad (2.5b)$$

Die Gleichung (2.1c) wird identisch erfüllt, wie man leicht nachprüfen kann. Da die Tolman–Gleichung eine zusätzliche Bedingung an die Raumzeit darstellt, ist dies auch erforderlich. Andernfalls wäre das System überbestimmt.

Mit $C = 0$ beschreibt (2.5) ein statisches, sphärisch symmetrisches Vakuum. Die Lösungen sind dann die bekannten Schwarzschild–Lösungen (f_S, h_S) , die schwarze Löcher der Masse M beschreiben:

$$f_S(r) = 1 - \frac{2M}{r}, \quad h_S(r) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \quad . \quad (2.6)$$

Löst man (2.5b) nach h auf,

$$h = \frac{3f(f + rf')}{Cr^2 + 3f^2} \quad , \quad (2.7)$$

und setzt (2.7) mit der entsprechenden Ableitung von h dann in (2.5b) ein, so erhält man eine zum System (2.5) äquivalente Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$f'' = \frac{6Cr f^2 + 6Cr^2 f f' - 6f^3 f' + 2Cr^3 f'^2}{Cr^3 f + 3r f^3} \quad (2.8)$$

2.1. Skaleninvarianz und Reduktion der Ordnung

Die Lösungen des Systems (2.5) können durch drei Parameter, z. B. C und die Anfangswerte von f und h , parametrisiert werden. Die Menge \mathcal{S} der Lösungen ist jedoch invariant unter der 2-parametrischen Gruppe von Skalentransformationen

$$r \mapsto \lambda r, \quad f \mapsto \mu f, \quad h \mapsto h, \quad C \mapsto \frac{\mu^2}{\lambda^2} C \quad , \quad (2.9)$$

wie im folgenden gezeigt werden soll.

Sei dazu (f, h) eine Lösung des Gleichungssystems zum Parameter C . Wir transformieren nun die Gleichung (2.8) mittels der Skalentransformationen

$$\tilde{r} := \lambda r, \quad \tilde{f}(\tilde{r}) := \mu f\left(\frac{\tilde{r}}{\lambda}\right), \quad \tilde{C} := \beta C \quad . \quad (2.10)$$

Dann gilt

$$\tilde{f}'(\tilde{r}) = \frac{\mu}{\lambda} f'\left(\frac{\tilde{r}}{\lambda}\right) = \frac{\mu}{\lambda} f'(r) \quad \text{und} \quad \tilde{f}''(\tilde{r}) = \frac{\mu}{\lambda^2} f''(r) \quad . \quad (2.11)$$

Einsetzen der geschlängelten Größen in (2.8) liefert

$$\tilde{f}'' = \frac{6\tilde{C}\tilde{r}\tilde{f}^2 + 6\tilde{C}\tilde{r}^2\tilde{f}\tilde{f}' - 6\tilde{f}^3\tilde{f}' + 2\tilde{C}\tilde{r}^3\tilde{f}'^2}{\tilde{C}\tilde{r}^3\tilde{f} + 3\tilde{r}\tilde{f}^3} \quad (2.12)$$

Wir versuchen nun, die Skalierungsparameter λ, μ, β so zu bestimmen, daß (2.12) automatisch erfüllt ist. Das ist aber genau dann der Fall, wenn linke und rechte Seite von (2.12) gleich skalieren. Wir schreiben das Skalierungsverhalten von (2.12) symbolisch

$$\left[\frac{\mu}{\lambda^2} \right] = \frac{[\beta\lambda\mu^2] \oplus [\beta\lambda^2\mu\mu\lambda^{-1}] \ominus [\mu^3\mu\lambda^{-1}] \oplus [\beta\lambda^3\mu^2\lambda^{-2}]}{[\beta\lambda^3\mu] \oplus [\lambda\mu^3]} \quad (2.13)$$

$$= \frac{[\beta\lambda\mu^2] \oplus [\beta\lambda\mu^2] \ominus [\mu^4\lambda^{-1}] \oplus [\beta\lambda\mu^2]}{[\beta\lambda^3\mu] \oplus [\lambda\mu^3]}. \quad (2.14)$$

Dabei sind die Terme in den eckigen Klammern die Skalierungsfaktoren der einzelnen Terme in (2.12) in der Reihenfolge ihres Auftretens. Damit (2.12) erfüllt ist, muß also gelten

$$\text{Zähler:} \quad \beta\lambda\mu^2 = \mu^4\lambda^{-1} \quad (2.15)$$

$$\text{Nenner:} \quad \beta\lambda^3\mu = \lambda\mu^3 \quad (2.16)$$

$$\text{sowie} \quad \text{Linke Seite von (2.12)} = \text{Rechte Seite von (2.12)}. \quad (2.17)$$

Diese drei Bedingungen werden genau dann erfüllt, wenn

$$\beta = \frac{\mu^2}{\lambda^2}. \quad (2.18)$$

Somit ist die skalierte Lösung \tilde{f} wieder Lösung von (2.8) zum Parameter $\frac{\mu^2}{\lambda^2}C$. Setzen wir dieses Ergebnis in (2.7) ein, liefert das

$$\tilde{h}(\tilde{r}) = \frac{3\tilde{f}(\tilde{r})(\tilde{f}'(\tilde{r}) + \tilde{r}\tilde{f}''(\tilde{r}))}{\tilde{C}\tilde{r}^2 + 3\tilde{f}^2} \quad (2.19a)$$

$$= \frac{3\mu f(r)(\mu f'(r) + \lambda r \mu \lambda^{-1} f''(r))}{\mu^2 \lambda^{-2} C \lambda^2 r^2 + 3\mu^2 f^2(r)} \quad (2.19b)$$

$$= h(r) \quad (2.19c)$$

$$= h\left(\frac{\tilde{r}}{\lambda}\right). \quad (2.19d)$$

Somit haben wir gezeigt, daß die Skalentransformationen (2.9) Lösungen von Gleichung (2.8) aufeinander abbilden. Andere Skalierungen führen nicht wieder auf Lösungen.

Die Bedeutung dieser Symmetriegruppe macht man sich am einfachsten klar, indem man sie auf das Linienelement anwendet. Wir bezeichnen dazu die Lösungen von (2.8) mit $f(r; C, p)$, und $h(r; C, p)$, wobei p für zwei beliebige Parameter stehe, die geeignet sind, die Lösung vollständig zu bestimmen, z. B. Anfangswerte von f und h . Das Linienelement

der $f(r; C, p)$ entsprechenden Raumzeit bezeichnen wir mit $ds_{[C,p]}^2$. Ist $f(r; C, p)$ eine Lösung von (2.8), dann gibt es nach (2.10) Parameter p' und Lösungen $f(r; \frac{\mu^2}{\lambda^2}C, p')$ so, daß gilt

$$f\left(r; \frac{\mu^2}{\lambda^2}C, p'\right) = \mu f\left(\frac{r}{\lambda}; C, p\right). \quad (2.20)$$

Das Linienelement der aus der Lösung $f(r; C, p)$ resultierenden Raumzeit lautet dann

$$ds_{[C,p]}^2 = -f(r; C, p)dt^2 + h(r; C, p)dr^2 + r^2d\Omega^2. \quad (2.21)$$

Durch Transformation der Koordinatenzeit t auf die neue Koordinate $\hat{t} = \sqrt{\mu}t$ folgt dann

$$ds_{[C,p]}^2 = -\mu f(r; C, p)d\hat{t}^2 + h(r; C, p)dr^2 + r^2d\Omega^2 \quad (2.22)$$

$$= f(r; \mu^2C, p')d\hat{t}^2 + h(r; \mu^2C, p')dr^2 + r^2d\Omega^2. \quad (2.23)$$

Da die Koordinatenzeit keinerlei physikalische Bedeutung hat, beschreiben die Lösungen $f(r; \mu^2C, p')$ und $f(r; C, p)$ also ein und dieselbe Raumzeit. Wir haben damit gezeigt, daß die 3-parametrische Lösungsmenge von (2.8) lediglich einer zweiparametrischen Schar von physikalisch unterschiedlichen Lösungen entspricht!

Betrachten wir nun die Skalentransformationen mit $\lambda \neq 1$. Es gilt

$$ds_{[C,p]}^2 = -f(r; C, p)dt^2 + h(r; C, p)dr^2 + r^2d\Omega^2 \quad (2.24)$$

$$= -f(\lambda^{-1}r; \lambda^2C, p')dt^2 + h(\lambda^{-1}r; \lambda^2C, p')dr^2 + r^2d\Omega^2 \quad (2.25)$$

$$= -f(\hat{r}; \lambda^2C, p')dt^2 + h(\hat{r}; \lambda^2C, p')\lambda^2d\hat{r}^2 + \lambda^2\hat{r}^2d\Omega^2, \quad (2.26)$$

mit $\hat{r} = \lambda^{-1}r$. Hier können wir mittels $t = \lambda\hat{t}$ die Form erreichen

$$ds_{[C,p]}^2 = \lambda^2 [-f(\hat{r}; \lambda^2C, p')d\hat{t}^2 + h(\hat{r}; \lambda^2C, p')d\hat{r}^2 - \hat{r}^2d\Omega^2] \quad (2.27)$$

$$= \lambda^2 ds_{[\lambda^2C, p']}^2 \quad (2.28)$$

Dies zeigt, daß die Metrik $ds_{[C,p]}^2$ bis auf eine Konstante mit der Metrik $ds_{[\lambda^2C, p]}^2$ identisch ist. Man nennt solche Metriken *konform*. Die beiden entsprechenden Raumzeiten sind physikalisch unterscheidbar. Sie haben aber die gleiche kausale Struktur, d. h. konforme Metriken haben identische Lichtkegel (siehe z. B. [14]).

Die Skaleninvarianz werden wir nun nutzen, um (2.8) in ein äquivalentes autonomes Gleichungssystem niedrigerer Ordnung zu transformieren. Wir folgen dabei einem Verfahren, das von Arnold beschrieben wurde. Die mathematische Grundlage liefert folgender Satz ([15], 1.1.4).

Satz. *Ist eine einparametrische Symmetriegruppe eines Richtungsfeldes im \mathbb{R}^n bekannt, so läßt sich die Integration der entsprechenden Differentialgleichung auf die Integration einer Differentialgleichung im \mathbb{R}^{n-1} zurückführen.*

Man geht folgendermaßen vor: Zunächst beschränken wir uns auf den Unterraum von \mathcal{S} mit $C = 1$, da wir zu jeder Lösung eine physikalisch äquivalente Lösung mit $C = 1$ finden können. Aus (2.8) wird dann

$$f'' = \frac{6rf^2 + 6r^2ff' - 6f^3f' + 2r^3f'^2}{r^3f + 3rf^3} . \quad (2.29)$$

Das entsprechende Richtungsfeld hat die implizite Darstellung:

$$\frac{df}{dr} = F(r, f, f''), \quad F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.30)$$

Von der zweiparamterigen Menge von Skalierungen bleibt eine einparametrische Teilmenge, die durch $\mu = \lambda$ gegeben ist. Wir definieren nun die einparametrische, abelsche Gruppe $G = \{g^s\}$ von Skalentransformationen durch

$$g^s(r, f, f') = (e^s r, e^s f, f'), \quad s \in \mathbb{R} . \quad (2.31)$$

Da f' unter den Skalierungen mit $\mu = \lambda$ invariant ist, ist $G = \{g^s\}$ eine Symmetriegruppe des Richtungsfeldes von (2.29).

Durch G läßt sich eine Äquivalenzrelation auf \mathcal{S} definieren: Wir nennen zwei Punkte $x, y \in \mathcal{S}$ dann äquivalent, wenn sie auf demselben Orbit von G liegen, also

$$x \sim y \stackrel{\text{def}}{\iff} g^s x = y \quad \text{für ein } s \in \mathbb{R} . \quad (2.32)$$

Reflexivität, Symmetrie und Transitivität der Relation \sim sind offensichtlich. \mathcal{S} läßt sich nun in Äquivalenzklassen $[x]$ bezüglich \sim zerlegen. Den Faktorraum $\mathcal{S}/G = \{[x] : x \in \mathcal{S}\}$ bezüglich \sim bezeichnen wir mit Ω . Die Punkte in Ω sind Orbits von G in \mathcal{S} ; wir nennen Ω deshalb den Orbitraum der Gruppe G .

Wir wählen in \mathcal{S} die durch $r = 1$ gegebene Fläche Σ und projizieren das Richtungsfeld auf den Orbitraum Ω .

Ein Punkt $X = (r, f, f')$ des Lösungsraumes liegt auf genau einem Orbit von G . Folgen wir diesem Orbit, so wird er die Fläche $r = 1$ in dem Punkt $(1, f/r, f')$ schneiden. Wir können daher im Orbitraum die Koordinaten

$$x := \frac{f(r)}{r} \quad \text{und} \quad z := f'(r) , \quad (2.33)$$

wählen. Das führt dann im Lösungsraum auf die neuen Koordinaten

$$x = \frac{f(r)}{r}, \quad z = f'(r) , \quad s = \ln r. \quad (2.34)$$

Einsetzen von (2.33) in (2.29) liefert unter Ausnutzung von $\frac{d}{dr} = \frac{1}{r} \frac{d}{ds}$

$$\frac{1}{r} \frac{dz}{ds} = \frac{1}{r} \frac{6x^2 + 6xz - 6x^3z + 2z^2}{x + 3x^3} , \quad (2.35)$$

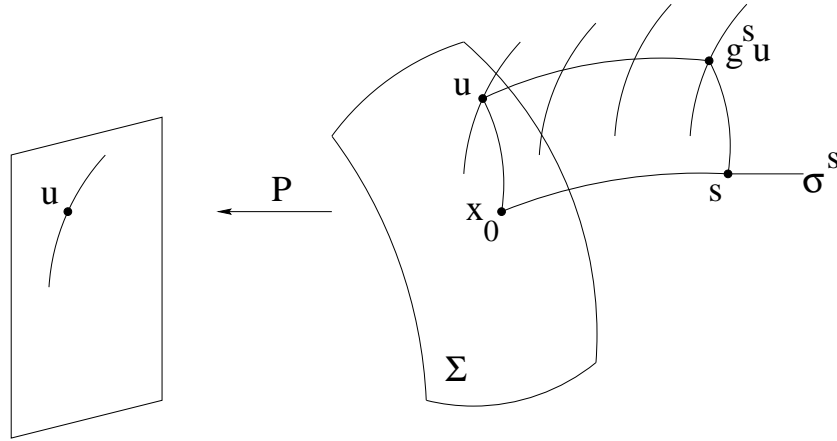


Abbildung 2.1: Die Projektion des Richtungsfeldes auf den Orbitraum.

und nach Multiplikation mit r auf beiden Seiten

$$\frac{dz}{ds} = \frac{6x^2 + 6xz - 6x^3z + 2z^2}{x + 3x^3} . \quad (2.36)$$

Direkt aus (2.33) folgt

$$\frac{dx}{ds} = r \left(\frac{f'(r)}{r} - \frac{f(r)}{r^2} \right) = z - x \quad (2.37)$$

Weiter vereinfachen lassen sich diese Gleichungen formal¹⁰ durch die Transformation

$$y = z + x . \quad (2.38)$$

Aus (2.35) und (2.37) wird dann

$$\frac{dx}{ds} = y - 2x \quad (2.39a)$$

$$\frac{dy}{ds} = \frac{2y^2 - 3x^3y + 3xy}{3x^3 + x} . \quad (2.39b)$$

Wir werden dieses System im folgenden „die reduzierten Gleichungen“ nennen. Eine ähnliche reduzierte Form hat auch O. Klein in [7] betrachtet. Es ist offensichtlich, daß

$$x_0 = \sqrt{\frac{7}{3}}, \quad y_0 = 2\sqrt{\frac{7}{3}} \quad (2.40)$$

ein stabiler Fixpunkt des reduzierten Gleichungssystems ist.

¹⁰Auch die vereinfachte Gleichung läßt sich leider nicht geschlossen lösen!

3. Lösungen

Wir wollen uns nun den Lösungen der Gleichung (2.8) zuwenden. Es kann eine exakte Lösung angegeben werden. Weitere Lösungen können nur mit numerischen Mitteln gefunden werden.

Es wird gezeigt, daß die numerischen Lösungen im wesentlichen in zwei Klassen zerfallen, Lösungen die im Koordinatenursprung regulär sind, und solche, die dort divergieren. Es werden anschließend Näherungen an die Lösungen besprochen.

3.1. Exakte Lösungen

Wie in 2.1 bemerkt, ist

$$x_0 = \sqrt{\frac{7}{3}}, \quad y_0 = 2\sqrt{\frac{7}{3}} \quad (3.1)$$

ein Fixpunkt, und also auch Lösung des reduzierten Gleichungssystems. Durch Umkehrung der Transformation (2.33) erhalten wir die exakte Lösung

$$f(r) = \sqrt{\frac{7}{3}}r, \quad h(r) = \frac{7}{4} \quad (3.2)$$

des Gleichungssystems (2.5). Diese Lösung wird von allen anderen für $r \rightarrow \infty$ asymptotisch angestrebt. Sie ist wohlbekannt (siehe [7] oder [9], Aufgabe 23.10) und beschreibt üblicherweise den ultrarelativistischen Grenzfall eines sphärisch symmetrischen Sterns, insbesondere Neutronensterns. Die ultrarelativistische Näherung kann aber nicht über die gesamte Raumzeit bestehen. Als Sternenmodell wird (3.2) daher als unrealistisch erachtet. Da wir jedoch ein Photonengas als Gravitationsquelle betrachten, ist die Zustandsgleichung $\rho = 3P$ durchaus über die gesamte Raumzeit erfüllt. Ein größeres Problem zeigt sich hier jedoch im Ursprung $r = 0$. Da $\rho \sim 1/f^2$ divergiert die Energiedichte im Ursprung. Die Lösung (3.2) ist daher auch für Photonengase als unphysikalisch zu erachten.

Interessant ist, daß die Lösung (3.2) einer größeren Klasse von Lösungen der Einsteinschen Feldgleichungen angehört: Für jede Zustandsgleichung $p = \alpha\rho$ einer idealen Flüssigkeit existiert eine statische *selbstähnliche* Lösung der Einsteinschen Feldgleichungen (siehe [10], [11]). Im Falle $\rho = 3p$ ist diese selbstähnliche Lösung genau durch (3.2) gegeben.

Selbstähnliche Lösungen der Einsteinschen Feldgleichungen werden z. B. in Modellen des Gravitationskollapses untersucht ([16]), wo sie zu einer Vereinfachung des zu untersuchenden Systems führen..

Eine weitere exakte Lösung ist

$$y = 0, \quad x = ae^{-2s} \quad \text{bzw.} \quad (3.3)$$

$$f(r) = \frac{a}{r}, \quad h(r) = 0 \quad . \quad (3.4)$$

Da $h(r) = 0$ ist diese Lösung unphysikalisch. Weitere exakte Lösungen konnten nicht gefunden werden.

3.2. Numerische Lösungen

Um weitere Lösungen der Gleichung (2.8) zu finden, machen wir für f den Laurentreihen-Ansatz

$$f(r) = \sum_{n=-1}^{\infty} a_n r^n \quad (3.5)$$

und setzen dies in (2.8) ein. Mithilfe eines Computeralgebrasystems wie MATHEMATICA kann man daraus leicht die ersten k Koeffizienten a_n bestimmen. Wir begnügen uns hier mit den ersten drei nichtverschwindenden Termen:

$$f(r) = \frac{A}{r} + B + \frac{CB}{15A^2}r^4 + \mathcal{O}(r^5), \quad (3.6a)$$

$$h^{-1}(r) = \frac{A}{Br} + 1 - \frac{C}{15A^2}r^4 + \mathcal{O}(r^5) \quad . \quad (3.6b)$$

Für kleine r können f und h durch Schwarzschild-Lösungen (2.6) approximiert werden. Um allerdings die richtige Signatur der Metrik zu gewährleisten, muß $f(r) > 0$ gelten. Ein stetiger Vorzeichenwechsel von f und h , wie am Ereignishorizont der Schwarzschildmetrik, ist hier ausgeschlossen, da mit (2.8) aus $f(r_0) = 0$ auch $f''(r_0) = \infty$ folgt. Unabhängig von C kann man also sagen, daß im Limes $r \rightarrow 0$ die Metrik der Lösungen (3.6a) wie eine Schwarzschildmetrik negativer Masse aussieht.

Für weitere Betrachtungen dieses Lösungstyps, wurde (2.8) in eine Differentialgleichung für

$$F(r) := r f(r) \quad (3.7)$$

transformiert, um der Singularität im Ursprung Rechnung zu tragen. Nach numerischer Lösung dieser transformierten Gleichung mithilfe der `NDSolve`-Routine von MATHEMATICA wurde auf $f(r)$ zurücktransformiert. Es entstand so eine Art Katalog von Lösungen. Eine typische Lösung zeigt Abbildung 3.1.

Die Lösung aus Abbildung 3.1 hat ein ziemlich scharfes Maximum an der Stelle r_0 , während sich f dort in der Nähe seines Minimums befindet. In der Umgebung von r_0 sind f und h gut durch die Schwarzschildnäherungen approximiert. In einem Bereich $r_1 < r < r_0$ bleibt f klein, divergiert dann aber für $r \rightarrow 0$, entsprechend (3.6). Dies bedeutet nach (2.3), daß die Energiedichte in der Metrik auf diesen Bereich, eine Kugelschale, konzentriert ist. Man kann diese Lösungen also als „Photonensterne“ und r_0 als den entsprechenden Sternradius interpretieren.

Nicht alle diese Lösungen zeigen einen so deutlich kompakten Charakter, wie die aus Abbildung 3.1. Um verschiedene Lösungen vergleichen zu können, wurden mehrere Lösungen zu verschiedenen Werten von C gemäß (2.10) so skaliert, daß h das Maximum an der Stelle $r = 1$ annimmt. Das Resultat ist in den Abbildungen 3.3 und 3.4 zu sehen. Es ist deutlich zu erkennen, daß einige Lösungen eine deutlich verschmiertere Energiedichte haben.

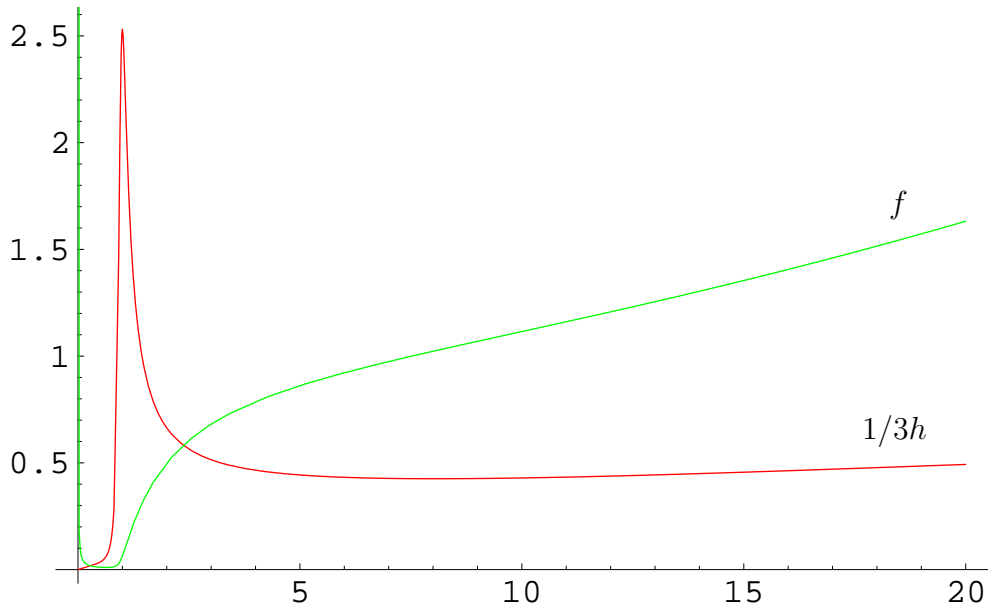


Abbildung 3.1: Eine typische numerische Lösung von (2.8). Das Maximum von $h(r)$ liegt bei $r = r_0 = 1$.

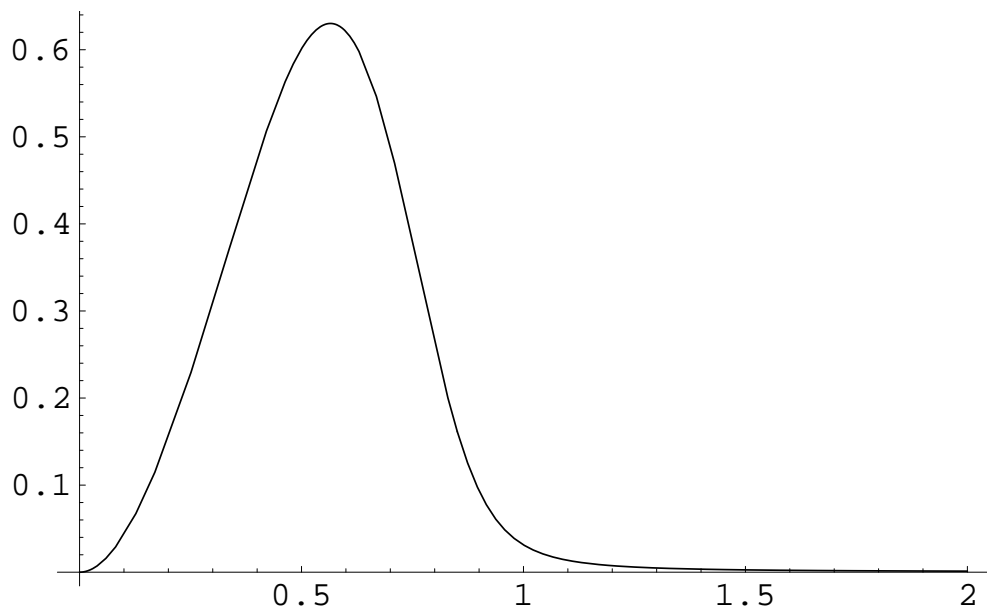


Abbildung 3.2: Eine typische Energiedichte ρ . Sie entstammt einer Lösung, in der h sein Maximum an der Stelle $r = 1$ annimmt.

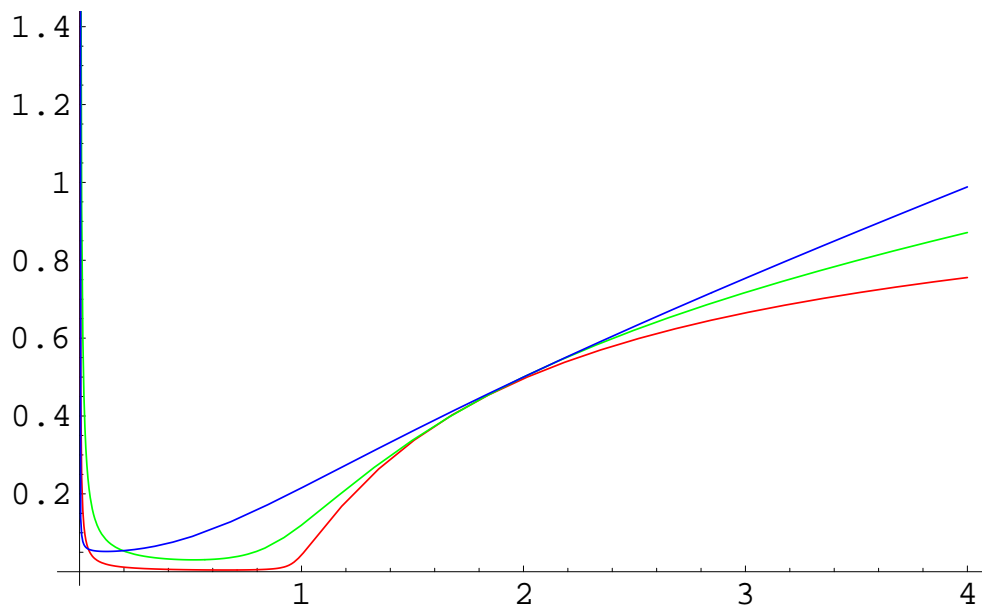


Abbildung 3.3: Numerische Lösungen $f(r)$ für verschiedene C , skaliert wie im Text beschrieben.

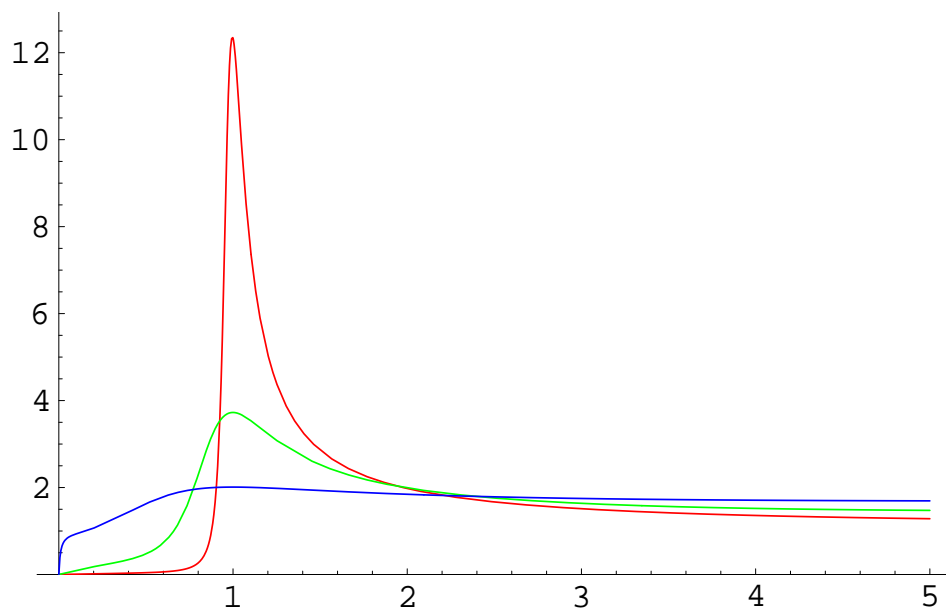


Abbildung 3.4: Numerische Lösungen $h(r)$ für verschiedene C , skaliert wie in Abbildung 3.3.

3.2.1. Die Lösungen in der reduzierten Darstellung

Die Lösungen der reduzierten Gleichungen stellen Spiralen dar, die sich in den Fixpunkt (x_0, y_0) hineinbewegen, Abbildung 3.2.1. Die Kurven starten bei $x = +\infty, s = -\infty$. Für

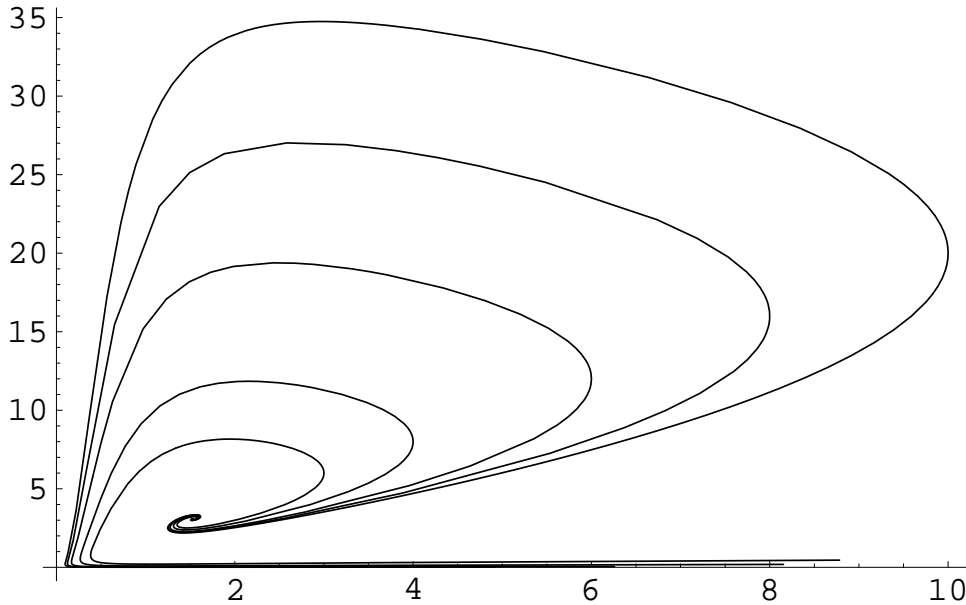


Abbildung 3.5: Lösungen der reduzierten Gleichung

kleine r gilt (vgl. (3.6a))

$$x \approx \frac{A}{r^2} + \frac{B}{r} \quad (3.8)$$

und

$$y \approx -\frac{A}{r^2}. \quad (3.9)$$

Daraus folgt für $s \rightarrow -\infty$ die asymptotische Form $y \sim \sqrt{x}$. Die Lösungskurven verlaufen also zunächst entlang ihrer Asymptoten und erreichen dann ein Minimum von x . Dort steigen sie steil an, um sich schließlich im Uhrzeigersinn wirbelartig in den Fixpunkt (x_0, y_0) zu bewegen. Dabei schneiden sie die Gerade $y = 2x$ abzählbar unendlich oft. Die Schnittpunkte sind die lokalen Extrema von x , denn es ist

$$x' = \frac{f'}{r} - \frac{f}{r^2}, \quad (3.10)$$

und daher an den Stellen $x' = 0$

$$\frac{f'}{r} = \frac{f}{r^2}. \quad (3.11)$$

Daraus folgt dann

$$y = f' + x = \frac{f}{r} + x = 2x. \quad (3.12)$$

In den Schnittpunkten verlaufen die Kurven parabelartig. Die approximierenden Parabeln entsprechen äußeren Schwarzschild-Lösungen (siehe Abschnitt 3.5).

3.2.2. Linearisierung der reduzierten Gleichungen

Wir wollen nun das Verhalten der Lösungen von (2.39a) betrachten. Dazu linearisieren wir das System um den Fixpunkt (x_0, y_0) . Setzen wir

$$X := x - x_0 \quad \text{und} \quad Y := y - y_0 \quad , \quad (3.13)$$

so erhalten wir in der Nähe des Fixpunktes das linearisierte System

$$X'' + \frac{3}{2}X' + \frac{7}{2}X = 0 \quad (3.14a)$$

$$Y = 2X + X' \quad . \quad (3.14b)$$

Auch dieses System wurde bereits in [7] betrachtet. Die Lösungen von (3.14) lauten

$$X(t) = e^{-\frac{3}{4}t} \left(X_0 \cos \frac{\sqrt{47}t}{4} + \frac{3X_0}{\sqrt{47}} \sin \frac{\sqrt{47}t}{4} \right) \quad (3.15a)$$

$$Y(t) = \frac{1}{47} e^{-\frac{3}{4}t} \left(94X_0 \cos \frac{\sqrt{47}t}{4} - 8\sqrt{47}X_0 \sin \frac{\sqrt{47}t}{4} \right) , \quad (3.15b)$$

mit den Anfangsbedingungen $X(0) = X_0$ und $Y(0) = 2X_0$. Diese Lösungen beschreiben Spiralbahnen, die sich mit großem t immer mehr dem Fixpunkt $(X, Y) = (0, 0)$ annähern, da $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\frac{3}{4}t} = 0$.

3.3. Die Kleinsche Lösungsklasse

Eine weitere Klasse von Lösungen hat O. Klein gefunden. Er untersuchte in [7] Lösungen, die im Ursprung analytisch sind. Wie sich herausstellt, handelt es sich dabei um die Teilmenge der Lösungen mit $f'(0) = 0$, oder äquivalent mit $h(0) = 1$. Für andere Anfangswerte sind keine analytischen Lösungen des Gleichungssystems möglich! Diese Einschränkung der Anfangswerte führt dazu, daß die Kleinschen Lösungen numerisch nur schwer zugänglich sind¹¹.

Macht man allerdings einen Potenzreihen-Ansatz für f und setzt diesen in (2.8) ein, so erhält man die analytischen Lösungen:

$$f_K(r) = A + \frac{Cr^2}{3A} + \frac{C^2r^4}{45A^3} - \frac{4C^3r^6}{945A^5} + \mathcal{O}(r^9) \quad (3.16a)$$

$$h_K(r) = 1 + \frac{Cr^2}{3A} - \frac{C^2r^4}{45A^4} - \frac{2C^3r^6}{189A^6} + \frac{37C^4r^8}{14175A^8} + \mathcal{O}(r^9) \quad (3.16b)$$

Dies wurde mit MATHEMATICA ermittelt.

Möchte man sich die Kleinschen Lösungen veranschaulichen, so steht man vor einigen Schwierigkeiten: Die Sensibilität der Anfangsbedingungen verhindert die direkte Verwendung von numerischen Lösungsverfahren, wie z. B. NDSolve von MATHEMATICA.

¹¹Deshalb wurden sie von uns zunächst auch übersehen

Auch der Konvergenzradius der Reihen (3.16) ist zu klein, als daß man irgendwelche konkreteren Aussagen über die Eigenschaften der Metrik bekommen könnte. So zeigen die Reihen (3.16) in der Nähe von $r = 2,5$ divergentes Verhalten, das mit höherer Ordnung immer deutlicher wurde. Eine Darstellung der n -ten Wurzel des Betrages des n -ten Entwicklungskoeffizienten von f_K erhärtet die Vermutung, daß bei $r \approx 2,5$ der Konvergenzradius der Reihe erreicht wird, Abbildung 3.6, denn es ist

$$\frac{1}{R} = \limsup |a_n|^{1/n}, \quad (3.17)$$

wobei R der Konvergenzradius einer Reihe, und a_n die Entwicklungskoeffizienten sind. Die Abbildung 3.6 läßt $\limsup |a_n|^{1/n} \approx 0.4$ vermuten, was $R \approx 2,5$ zur Folge hätte. Aufgrund der genannten Schwierigkeiten wurde folgender Weg gegangen:

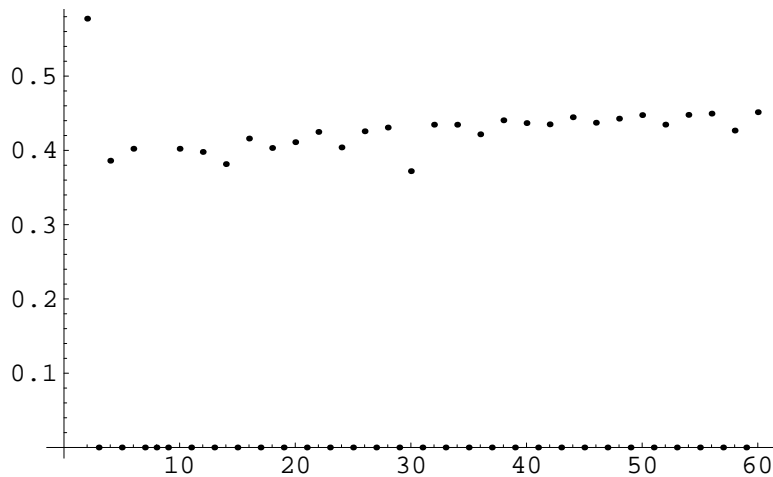


Abbildung 3.6: $n \mapsto |a_n|^{1/n}$, a_n : Entwicklungskoeffizienten von f_K

Die Lösungen (3.16) wurden zunächst bis zur Ordnung 20 bestimmt. An einem geeigneten Punkt wurden diese Näherungslösungen dann wieder mit einem neuen Potenzreihenansatz annähernd analytisch fortgesetzt. Dieses Verfahren wurde soweit fortgeführt, bis schließlich mit `NDSolve` eine numerische Lösung angeschlossen werden konnte. Abbildung 3.7 zeigt die Kleinsche Lösung zu $C = 1$ und $f_K(0) = 1$.

In der reduzierten Form erhält man die Darstellung

$$x_K(s) = \frac{1}{s} + \frac{s}{3} + \frac{s^3}{45} + \frac{37s^9}{334125} + \mathcal{O}(s^{12}) \quad \text{und} \quad (3.18a)$$

$$y_K(s) = \frac{1}{s} + s + \frac{s^3}{9} - \frac{4s^5}{135} + \frac{74s^9}{66825} + \mathcal{O}(s^{10}) \quad . \quad (3.18b)$$

Durch Koeffizientenvergleich erhält man daraus eine für große x und y gültige Beziehung zwischen den beiden Größen:

$$y = x + \frac{2}{3x} + \frac{14}{45x^3} + \frac{214}{945x^5} + \dots \quad (3.19)$$

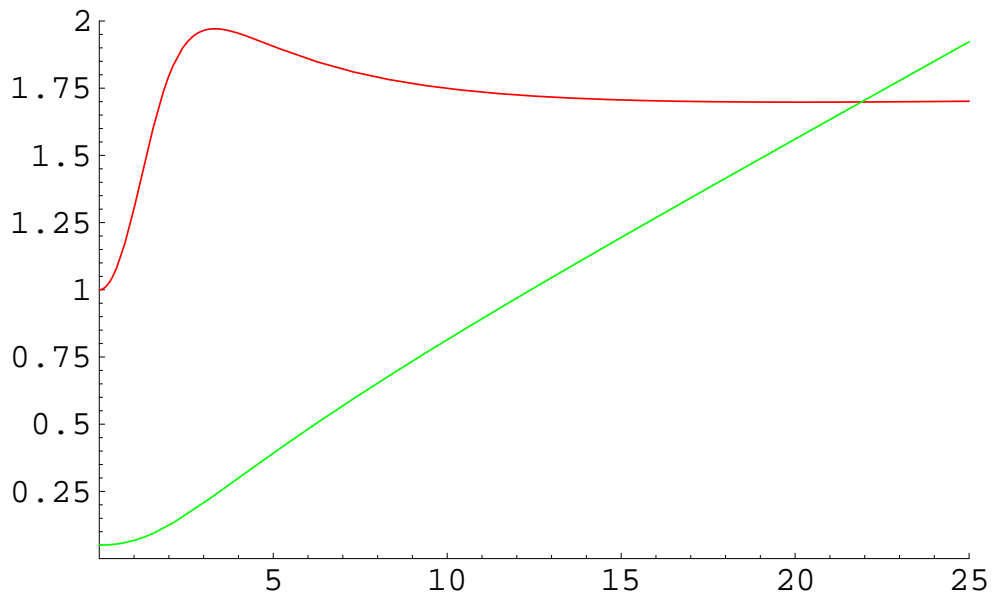


Abbildung 3.7: Die Kleinsche Lösung zu $C = 1$ und $f_K(0) = 1$. f wurde zur besseren Übersicht mit dem Faktor $1/30$ multipliziert.

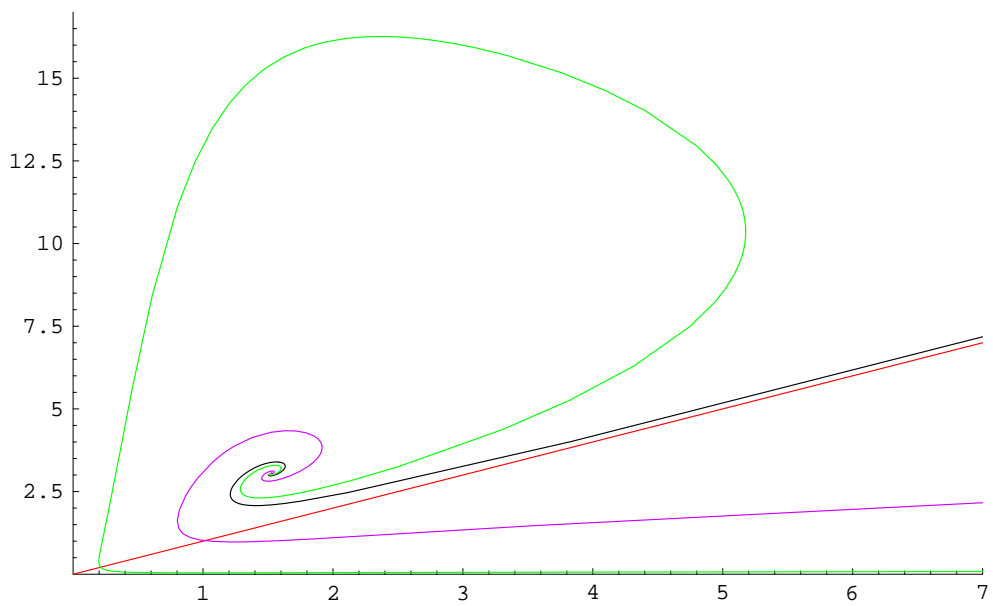


Abbildung 3.8: Die Kleinsche Lösung in der reduzierten Darstellung (Mitte), mit zwei normalen Lösungen und der Asymptoten $y = x$

Die Kleinsche Lösung hat also für große x, y die Asymptote $y = x$.

Eine weitere interessante Eigenschaft der Kleinschen Lösungen, erkennt man, wenn man sich die Lösungen der reduzierten Gleichungen ansieht. Es sei Γ die Gerade $y = 2x$. Jede Lösungskurve, vom Fixpunkt einmal abgesehen, schneidet Γ unendlich oft. Jeder Punkt von Γ liegt auf genau einer Lösungskurve. Da nun aber auch jede Lösungskurve einen ersten Schnittpunkt mit Γ hat, kann man die Schnittpunkte einer Lösungskurve mit Γ durchnummerieren. Auf diese Weise kann man dann Γ_n , $n \in \mathbb{N}$ als die Mengen der n -ten Schnittpunkte definieren. Numerisch scheint es sich bei den Γ_n um halboffene Intervalle von Γ zu handeln, z. B. $\Gamma_1 = (0, \gamma_1]$, $\Gamma_2 = [\gamma_2, \infty)$, $\Gamma_3 = (\gamma_1, \gamma_3]$, $\Gamma_4 = [\gamma_2, \gamma_4)$ usw. In 3.4.1 wird mit numerischen Mitteln gezeigt, daß die Kleinsche Lösung durch die Punkte γ_n verläuft.

3.4. Die Poincaré–Abbildung

Wie bereits im Abschnitt 3.3 erwähnt, stellt die Kleinsche Lösung eine gewisse Grenze zwischen zwei verschiedenen Klassen von Lösungen der reduzierten Gleichungen dar. Dieses Verhalten und auch die Asymptotik der Lösungen lassen sich sehr anschaulich mittels der Poincaré–Abbildung verdeutlichen.

Die Lösungen der reduzierten Gleichungen schneiden die Gerade $\Gamma := \{(x, y) : y = 2x\}$ abzählbar unendlich oft. Man kann nun auf dieser Geraden die Poincaré–Abbildung $P : \Gamma \rightarrow \Gamma$ folgendermaßen konstruieren:

Sei $x \in \Gamma$. Man folge nun der Lösung durch x in „positive Parameterrichtung“ bis zum nächsten Schnittpunkt, \bar{x} , mit Γ . Die Poincaré–Abbildung wird nun für jeden Punkt $x \in \Gamma$ durch $P(x) := \bar{x}$ definiert. Es ist klar, daß x_0 ein Fixpunkt von P ist.

Allerdings benötigt man zur Bestimmung der Poincaré–Abbildung meist geschlossene Lösungen der Lösungskurven; so auch hier. Da wir die Lösungen der reduzierten Gleichung aber nur numerisch kennen, sind wir auch hier auf Numerik angewiesen.

3.4.1. Numerische Behandlung der Poincaré–Abbildung

Zur numerischen Betrachtung der Poincaré–Abbildung wurde eine MATHEMATICA–Routine geschrieben, die zu verschiedenen Anfangswerten $(x, 2x)$ die reduzierten Gleichungen numerisch löst und anschließend den nächsten Schnittpunkt mit der Geraden $y = 2x$ sucht. Die so erhaltenen Daten können nun auf verschiedene Weise dargestellt werden:

Doppeltlogarithmische Darstellung

Abbildung 3.9 zeigt eine doppeltlogarithmische Darstellung der Poincaré–Abbildung. Dabei wurde allerdings nicht $P(x)$ über x aufgetragen, sondern der Abstand vom Ursprung der jeweiligen Punkte. Dieser ist für x gegeben durch $\sqrt{x^2 + (2x)^2}$, also $\sqrt{5}x$. Es wird also $\ln(\sqrt{5}x) \mapsto \ln(\sqrt{5}P(x))$ dargestellt.

Für große x nähert sich $\ln(\sqrt{5}P(x))$ asymptotisch einem Wert ≈ 1 . Dies läßt sich folgendermaßen verstehen: Aufgrund der Spiralform der Lösungen im x - y -Raum werden Punkte rechts vom Fixpunkt auf Punkte links vom Fixpunkt abgebildet. Es ist daher $P((x, \infty)) = (0, x)$. Der erste Schnittpunkt einer Lösung liegt links vom Fixpunkt, der

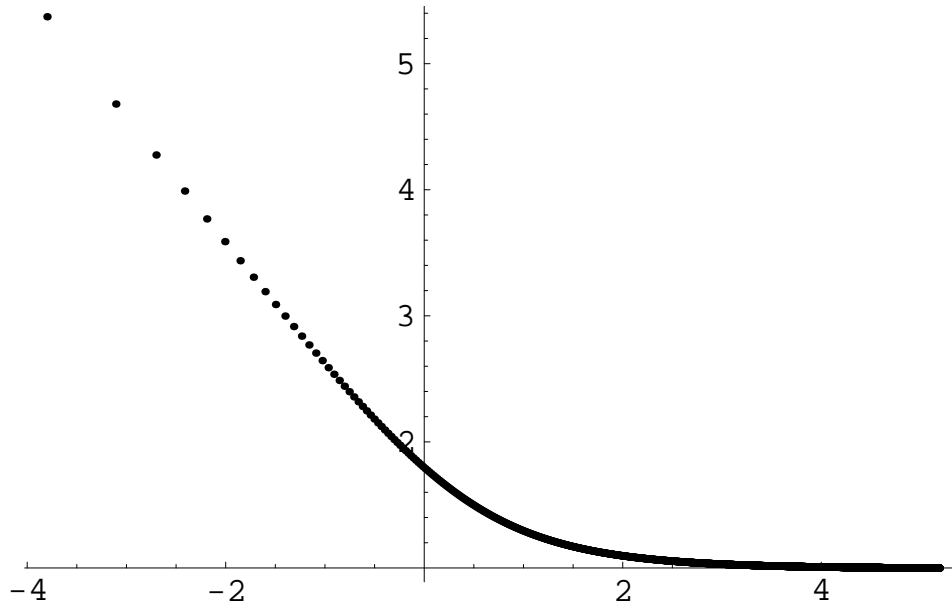


Abbildung 3.9: $\ln(\sqrt{5}x) \mapsto \ln(\sqrt{5}P(x))$

zweite rechts davon usw. Damit sich die Kurven nicht schneiden, muß es eine obere Grenze für erste Schnittpunkte geben, sodaß die Menge der ersten Schnittpunkte mit Γ von der Form $\Gamma_1 = (0, \gamma_1]$ sein muß. Die Menge der zweiten Schnittpunkte, Γ_2 , ist dann der Art $\Gamma_2 = [\gamma_2, \infty)$. Γ_2 ist aber das Bild von Γ_1 unter der Poincaré-Abbildung. Es folgt, daß $\lim_{x \rightarrow \infty} P^{-1}(x) = \gamma_1$ gelten muß.

Beschreiben wir die Punkte auf Γ durch ihre x -Koordinate, so ergibt sich aus der Abbildung 3.9

$$\gamma_1 \approx \frac{e}{\sqrt{5}} \approx 1,22 \quad (3.20)$$

Die einzige irgendwie ausgezeichnete Lösungskurve im x - y -Raum ist die Lösungskurve der Kleinschen Lösung. Es liegt also die Vermutung nahe, daß die Kleinsche Lösungskurve diejenige ist, die Γ in eben den Punkten γ_n schneidet. Aus der Reihenentwicklung der Kleinschen Lösung bis zur Ordnung 60 ergibt sich für den ersten Schnittpunkt der Kleinschen Lösung mit der Geraden Γ ein Wert von

$$x_{k1} \approx 1,21. \quad (3.21)$$

Dies scheint die Vermutung bezüglich der Kleinschen Abbildung im Rahmen der Rechengenauigkeit zu bestätigen. Es sei dabei noch darauf hingewiesen, daß die Genauigkeit, mit der die Poincaré-Abbildung berechnet wurde, sicherlich nicht allzu gut ist. Die Schnittpunkte wurden dort nämlich als numerische Lösungen von Gleichungen, die wiederum lediglich numerisch bekannte Funktionen enthalten, bestimmt. Weiterhin ist $\gamma_1 = \lim_{x \rightarrow \infty} P(x)$ und die Berechnung von P natürlich nur bis zu endlichen Werten von x möglich gewesen.

Die Berechnung von x_{k1} hingegen stützt sich auf die exakt bekannte Reihenentwicklung 60. Ordnung der Kleinschen Lösung. Der Schnittpunkt wird für $r \approx 1,6$ erreicht, also noch innerhalb des Konvergenzradius der Reihe. Dieser Wert ist daher als zuverlässiger anzusehen.

Der linke Teil der Abbildung 3.9 zeigt ebenfalls ein lineares Verhalten, das jedoch nicht einfach zu verstehen ist. Die grundlegende Eigenschaft $\lim_{x \rightarrow 0} P(x) = \infty$ war jedoch schon in der Darstellung der Lösungen von (2.39a) zu sehen.

Die Form von Abbildung 3.9 legt nahe, P mit

$$P(x) = \gamma_1 + ax^b \quad (3.22)$$

zu beschreiben. Die Unbekannten a und b werden im folgenden bestimmt:

Bestimmung von a und b

Wir werden zwei Eigenschaften der Poincaré–Abbildung ausnutzen:

- x_0 ist Fixpunkt von P .
- In der Nähe von x_0 können wir das Verhalten von P aus der Linearisierung (3.15) bestimmen.

Aus den Lösungen der Linearisierung folgt nämlich

$$\frac{Y}{X} = 2 \frac{47 \cos \frac{\sqrt{47}t}{4} - 4\sqrt{47} \sin \frac{\sqrt{47}t}{4}}{47 \cos \frac{\sqrt{47}t}{4} + 3\sqrt{47} \sin \frac{\sqrt{47}t}{4}} \quad (3.23)$$

Es ist somit:

$$\frac{Y}{X} = 2 \Leftrightarrow t = n\pi \frac{4}{\sqrt{47}}, \quad n \in \mathbb{N} \quad (3.24)$$

Damit folgt direkt aus (3.15)

$$P(X) = e^{-\frac{2\pi}{\sqrt{47}}}(-X) \quad (3.25)$$

Somit bekommt man die Steigung von $P(x)$ an der Stelle x_0 , nämlich $-e^{-\frac{2\pi}{\sqrt{47}}}$. $P(x)$ sollte also die beiden Eigenschaften haben:

$$P(x_0) = x_0 \quad \text{und} \quad (3.26)$$

$$P'(x_0) = -e^{-\frac{3\pi}{\sqrt{47}}} \quad (3.27)$$

Die Lösung dieses Gleichungssystems überläßt man lieber MATHEMATICA. Als Lösung erhält man die etwas unhandlichen Ausdrücke

$$a = \gamma_1 \frac{7^{\frac{\sqrt{21}e^{-\frac{3\pi}{\sqrt{47}}}}{2\sqrt{21}-6\gamma_1}}}{3} \left(\sqrt{7}3 - \gamma_1 \right) \quad (3.28)$$

$$b = \frac{2 \ln \left((7/3)^{\frac{\sqrt{21}e^{-\frac{3\pi}{\sqrt{47}}}}{-2\sqrt{21}+6\gamma_1}} \right)}{\ln \frac{7}{3}} \quad (3.29)$$

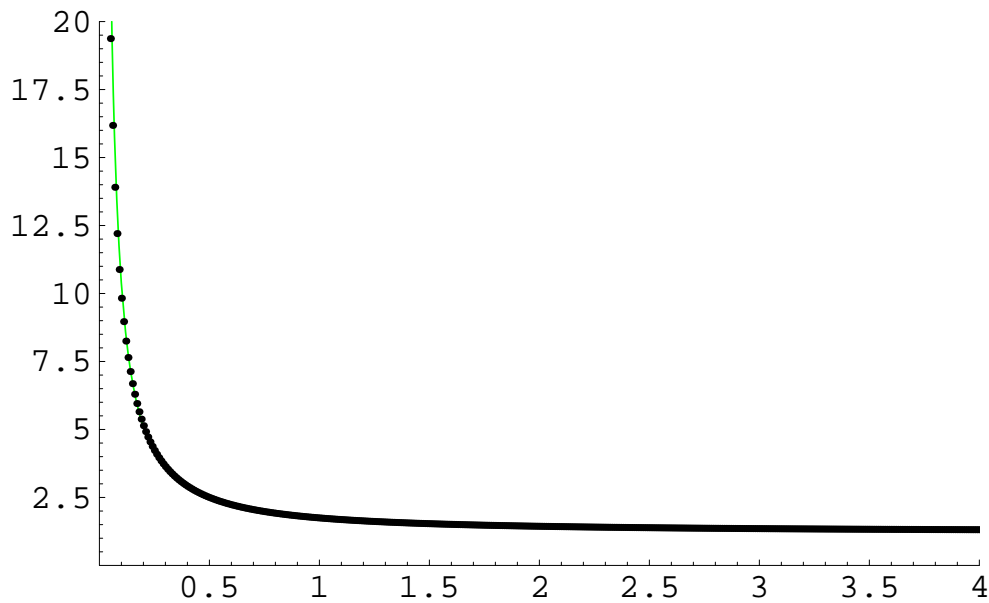


Abbildung 3.10: Die numerische Poincaré–Abbildung zusammen mit $\ln(P(x)) \mapsto \ln(\gamma_1 + ax^b)$.

In Abbildung 3.10 ist die so erhaltene Funktion zusammen mit der numerisch bestimmten Poincaré–Abbildung doppeltlogarithmisch dargestellt. Die Übereinstimmung ist sehr gut.

Doppeltlogarithmische Darstellung des Abstandes vom Fixpunkt

Eine sehr anschauliche Darstellung der Poincaré–Abbildung erhält man, indem man statt x den Abstand vom Fixpunkt betrachtet. Wir definieren

$$r(x) := \sqrt{(x - x_0)^2 + (2(x - x_0))^2} = \sqrt{5}(x - x_0) \quad , \quad (3.30)$$

also den Abstand eines Punktes $(x, 2x) \in \Gamma$ vom Fixpunkt, und tragen doppeltlogarithmisch $r(P(x))$ über $r(x)$ auf, Abbildung 3.11.

Die Grafik zeigt zwei Zweige, entsprechend der Mehrdeutigkeit von $r \mapsto x$. Der untere Zweig entspricht „Startpunkten“ rechts vom Fixpunkt, der obere den „Startpunkten“ links davon. Die diagonale Asymptote kommt aus der Linearisierung, die senkrechte zeigt die einfache Eigenschaft, daß die Lösungskurven der reduzierten Gleichung den Quadranten nicht verlassen. Die nicht eingezeichnete waagerechte Asymptote des unteren Zweiges entspricht wieder dem ersten Schnittpunkt der Kleinschen Lösung mit der Geraden Γ .

3.5. Schwarzschild-Approximation

Die Projektion auf den Orbitraum ermöglicht unter Ausnutzung der Eigenschaften der Kleinschen Lösung die Definition einer für jede Lösung eindeutigen Schwarzschild-Approximation.

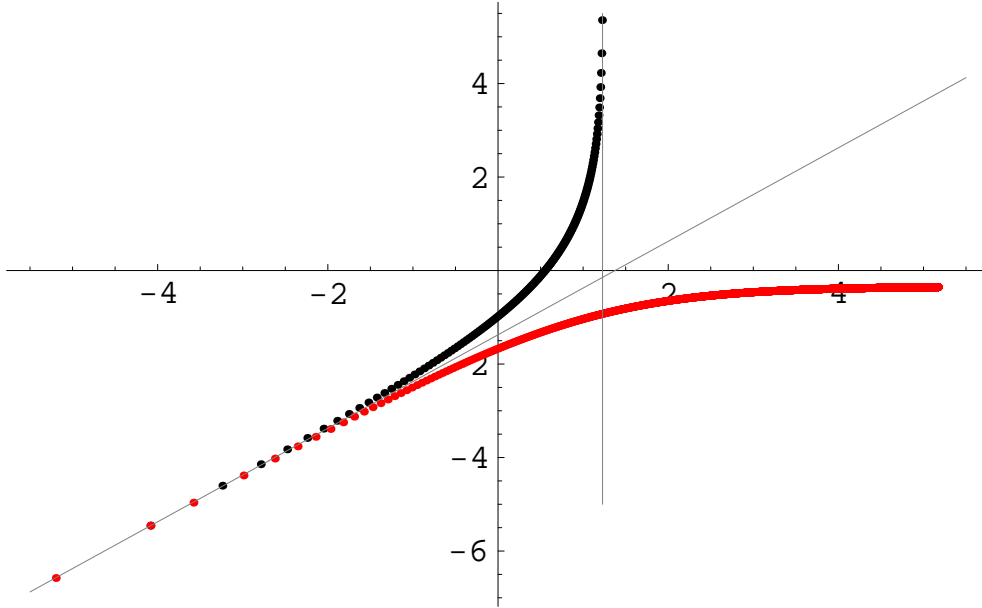


Abbildung 3.11: $\ln r \mapsto \ln P(r)$

Wir betrachten dazu die allgemeine äußere Schwarzschild-Lösung,

$$f_S(r) = K \left(1 - \frac{2M}{r}\right), \quad h_S(r) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}, \quad (3.31)$$

und transformieren sie in die reduzierte Darstellung. Wir erhalten

$$x_S = \frac{f(r)}{r} = \frac{1}{r} K \left(1 - \frac{2M}{r}\right) = \frac{1}{e^s} K \left(1 - \frac{2M}{e^s}\right). \quad (3.32)$$

Die Ableitung von f_S ist gegeben durch

$$f'_S(r) = K \frac{2M}{r^2}. \quad (3.33)$$

Es folgt daher

$$y_S = K \frac{2M}{r^2} + \frac{1}{r} K \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \quad (3.34)$$

$$= K \left(\frac{2M}{r^2} + \frac{1}{r} - \frac{2M}{r^2} \right) \quad (3.35)$$

$$= \frac{K}{r} = \frac{K}{e^s}. \quad (3.36)$$

Setzen wir $K = y_S e^s$ in (3.32) ein, so folgt

$$x_S(y_S) = y_S \left(1 - \frac{2M}{K} y_S\right) \quad (3.37)$$

$$= y_S - \frac{2M}{K} y_S^2. \quad (3.38)$$

Die allgemeinen Schwarzschild-Lösungen werden also in der reduzierten Form als liegende Parabeln dargestellt. Der Scheitelpunkt einer Schwarzschild-Lösung läßt sich bestimmen durch

$$x'_S = 1 - \frac{4M}{K} \hat{y} \stackrel{!}{=} 0 \quad (3.39)$$

$$\Leftrightarrow \hat{y} = \frac{K}{4M}. \quad (3.40)$$

Setzt man dies wieder in $x_S(y_S)$ ein, so erhält man die x -Koordinate des Scheitelpunktes:

$$\hat{x} := x_S(\hat{y}) = \frac{K}{4M} - \frac{2M}{K} \left(\frac{K}{4M} \right)^2 \quad (3.41)$$

$$= \frac{K}{4M} - \frac{K}{8M} \quad (3.42)$$

$$= \frac{K}{8M}. \quad (3.43)$$

Der Scheitelpunkt der Schwarzschild-Parabeln liegt also auf der Geraden $y = 2x$. Das war auch zu erwarten, denn aus $x = f/r$ und $y = f' + f/r$ folgt ganz allgemein $y = 2x$ an den Stellen mit $x' = 0$.

Sei jetzt also $f(r)$ eine Lösung unserer Grundgleichung. Dann ist das Bild ihrer Projektion wie oben beschrieben eine Kurve im x - y -Raum, die die Gerade $\Gamma = \{(x, y) : y = 2x\}$ abzählbar unendlich oft schneidet. Jeder dieser Schnittpunkte repräsentiert dann aber auch eine Klasse von Schwarzschild-Lösungen mit $\frac{K}{M} = 8x_n$. Dabei bezeichne y_n den n -ten Schnittpunkt der Lösungskurve mit der Geraden Γ . Es zeigt sich grafisch, daß die Schwarzschildparabeln im Orbitraum von g^s eine annehmbare Näherung an die Lösungen $f(r)$ darstellen, Abbildung 3.12.

Konforme Lösungen haben identische Bilder im x - y -Raum, also auch identische Schnittpunkte mit Γ . Sie werden den Schnittpunkt aber bei unterschiedlichen Werten von $s = \ln r$ erreichen. Wir können daher eine spezielle Lösung, $f(r)$, charakterisieren durch Angabe eines Schnittpunktes $(x_n, 2x_n)$ ihrer reduzierten Darstellung und des zugehörigen Kurvenparameters s_n (also s_n so, daß $(x(s_n), y(s_n)) = (x_n, 2x_n)$).

Wir definieren nun als die Schwarzschild-Approximation an die Lösung $f(r)$ im n -ten Schnittpunkt (x_n, y_n) diejenige Schwarzschild-Lösung mit $\frac{K}{8M} = x_n$ mit $f(e^{s_n}) = f_S(e^{s_n})$. Das bedeutet mit $r_n = e^{s_n}$:

$$f_S(r_n) = \frac{f(r_n)}{r_n} = x_n r_n \quad (3.44)$$

$$\Leftrightarrow K \left(1 - \frac{2M}{r_n} \right) = \frac{K}{8M} r_n \quad (3.45)$$

$$\Leftrightarrow \frac{r_n - 2M}{r_n} = \frac{r_n}{8M} \quad (3.46)$$

$$\Leftrightarrow r_n^2 - 16M^2 + 8Mr_n = 0 \quad (3.47)$$

$$\Leftrightarrow (r_n - 4M)^2 = 0, \quad (3.48)$$

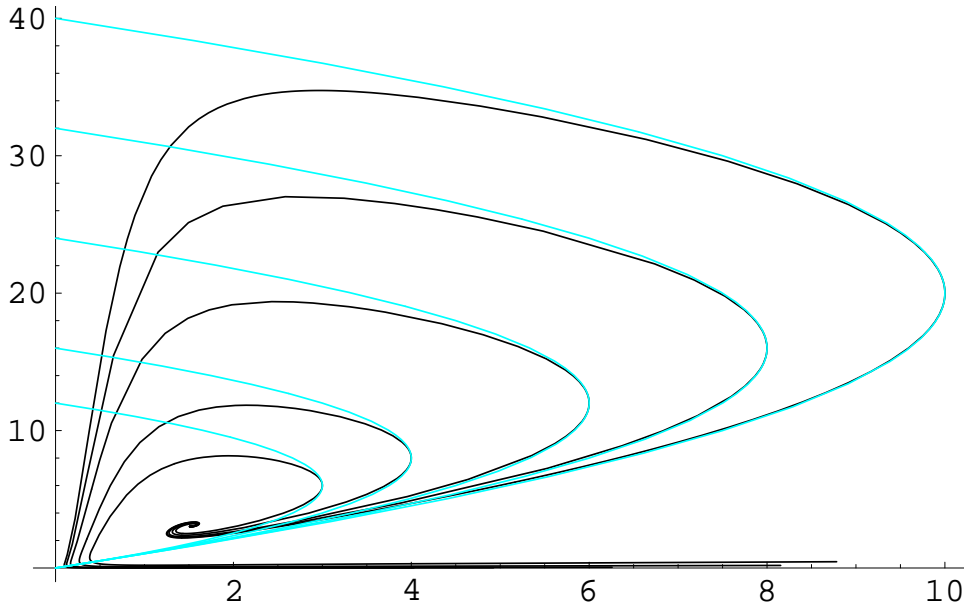


Abbildung 3.12: Schwarzschild-Approximationen im x - y -Raum

Also gilt für die Schwarzschild-Approximation insgesamt

$$M = \frac{r_n}{4} \quad \text{und} \quad x_n = \frac{K}{8M}. \quad (3.49)$$

Um nun jeder Lösung $f(r)$ eine *eindeutige* Schwarzschild-Approximation zuzuordnen, erinnern wir uns, daß die Kleinsche-Lösung die Gerade Γ in Intervalle Γ_n der n -ten Schnittpunkte unterteilt. Wir definieren damit die Schwarzschild-Approximation an eine Lösung $f(r)$ als die Schwarzschild-Approximation im zweiten Schnittpunkt. Den zweiten Schnittpunkt wählen wir, da die Approximation nur für Punkte $x_n > \sqrt{7/3}$ Sinn macht. Andernfalls würde die Schwarzschild-Approximation zwar die Lösungskurve tangieren, sie wäre aber im Gegensatz zur Lösungskurve in diesen Punkten linksseitig geöffnet. Höhere Schnittpunkte zu wählen macht wenig Sinn, da die Lösungen $f(r)$ sich mit großem r , also Schnittpunkten höherer Ordnung, mehr und mehr ihrer asymptotischen Form nähern. Die Qualität der Näherung wäre dann außerordentlich gering. Aus den Betrachtungen aus Abschnitt 3.4 ergibt sich für das Intervall der zweiten Schnittpunkte ungefähr $\Gamma_2 = [1, 6, \infty)$.

Die Güte der Schwarzschild-Approximation läßt sich ersehen, wenn man die Reihenentwicklung der Schwarzschild-Lösung in der reduzierten Form mit der einer Lösung vergleicht. Es gilt mit $(x(s_0), y(s_0)) = (x_S(s_0), y_S(s_0)) = (x_0, 2x_0)$ für Lösungskurven $(x(s), y(s))$

$$x(s) = x_0 + x_0 \left(-1 + \frac{8}{1 + 3x_0^2} \right) (s - s_0)^2 + \mathcal{O}((s - s_0)^3) \quad (3.50)$$

und

$$y(s) = 2x_0 + 2x_0 \left(-1 + \frac{8}{1 + 3x_0^2} \right) (s - s_0) + \frac{x_0(77 - 54x_0^2 + 4x_0^4)}{(1 + 3x_0^2)^2} (s - s_0)^2 + \mathcal{O}((s - s_0)^3), \quad (3.51)$$

sowie für Schwarzschild-Lösungen $(x_S(s), y_S(s))$

$$x_S(s) = x_0 - x_0(s - s_0)^2 + \mathcal{O}((s - s_0)^3) \quad (3.52)$$

$$y_S(s) = 2x_0 - 2x_0(s - s_0) + x_0(s - s_0)^2 + \mathcal{O}((s - s_0)^3). \quad (3.53)$$

Der Vergleich der Reihen zeigt, daß es sich bei den Schwarzschild-Approximationen lediglich um Näherungen nullter Ordnung handelt. Nichtsdestotrotz zeigt ein direkter Vergleich einer Lösung mit ihrer Schwarzschild-Approximation ein gutes Näherungsverhalten über ein kleines r -Intervall, Abbildung 3.13. In einer Umgebung von r_2 ist die

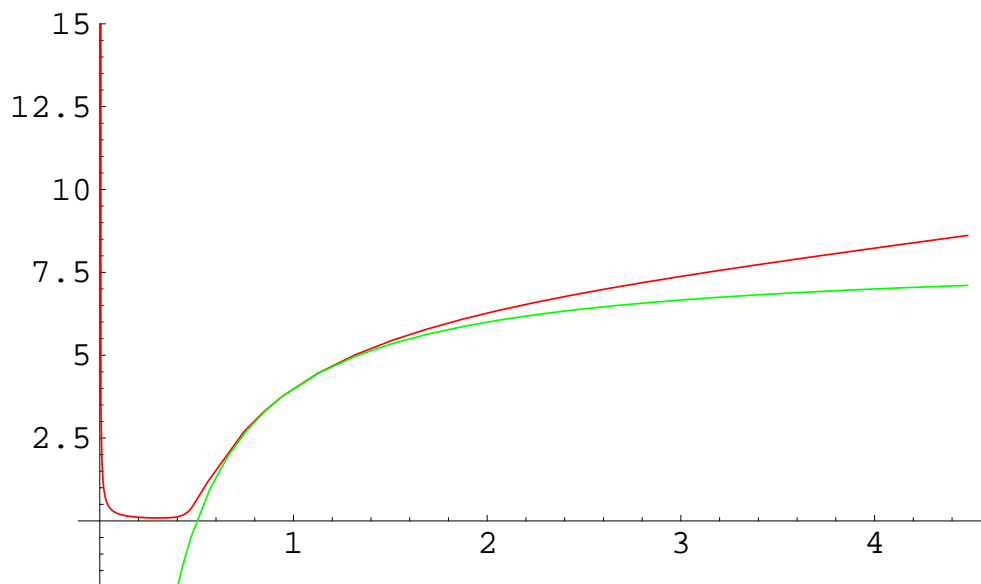


Abbildung 3.13: Die Lösung $f(r)$ mit $f(1) = 4$ und ihre Schwarzschild-Approximation

Metrik also annähernd eine Schwarzschild-Metrik der Masse $M = r_2/2$.

3.6. Ein Approximationsverfahren

Der Wunsch, bessere Informationen über das Verhalten der Lösungen in der Nähe des Fixpunktes zu bekommen, hat zu einem Verfahren geführt, daß hier vorgestellt werden soll.

Dazu transformieren wir zunächst die reduzierten Gleichungen mittels

$$X = x - x_0, \quad Y = y - y_0 \quad (3.54)$$

auf die Form

$$X' = Y - 2X \equiv F_X(X, Y), \quad (3.55a)$$

$$Y' = -\frac{(18X + 3\sqrt{21}X^2 + 3X^3 - 2Y)(2\sqrt{21} + 3Y)}{(\sqrt{21} + 3X)(8 + 2\sqrt{21}X + 3X^2)} \equiv F_Y(X, Y). \quad (3.55b)$$

Wir suchen nun eine nichtlineare Transformation $(X, Y) \mapsto (p, q)$ so, daß die transformierte Differentialgleichung „so linear wie möglich“ ist, in dem Sinne, daß die Terme der Ordnung 2 bis k in p, q verschwinden.

Schreiben wir X und Y als Polynome n -ten Grades in p, q :

$$X = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} x_{ij} p^i q^j, \quad (3.56a)$$

$$Y = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} y_{ij} p^i q^j. \quad (3.56b)$$

Wir fordern, daß in erster Ordnung $X = p$ und $Y = q$ gelten soll, also

$$x_{00} = y_{00} = x_{01} = y_{10} = 0, \quad (3.57)$$

$$x_{10} = y_{01} = 1. \quad (3.58)$$

Diese Transformation läßt sich umkehren und nach X und Y entwickeln:

$$p = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} p_{ij} X^i Y^j + \mathcal{O}(n+1), \quad (3.59a)$$

$$q = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} q_{ij} X^i Y^j + \mathcal{O}(n+1). \quad (3.59b)$$

Dabei steht $\mathcal{O}(n+1)$ für Terme $(n+1)$ -ter Ordnung in pq . In (3.59) lassen sich die p_{ij} und q_{ij} durch x_{ij} und y_{ij} ausdrücken. Betrachtet man p und q als Funktionen eines Parameters, so ergibt sich für die Ableitungen

$$p' = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} p_{ij} X^{i-1} Y^{j-1} \{iX'Y + jXY'\} + \mathcal{O}(n+1), \quad (3.60a)$$

$$q' = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} q_{ij} X^{i-1} Y^{j-1} \{iX'Y + jXY'\} + \mathcal{O}(n+1). \quad (3.60b)$$

Für X' und Y' setzen wir (3.55) ein und erhalten so

$$p' = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} p_{ij} X^{i-1} Y^{j-1} \{iF_X(X, Y)Y + jXF_Y(X, Y)\} + \mathcal{O}(n+1), \quad (3.61a)$$

$$q' = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} q_{ij} X^{i-1} Y^{j-1} \{iF_X(X, Y)Y + jXF_Y(X, Y)\} + \mathcal{O}(n+1). \quad (3.61b)$$

Ersetzen wir jetzt noch X und Y durch ihre Entwicklung (3.56), so erhalten wir zwei zu (3.55) äquivalente Differentialgleichungen für p und q der Form

$$p' = \sum_{i,j} P_{ij} p^i q^j, \quad (3.62a)$$

$$q' = \sum_{i,j} Q_{ij} p^i q^j. \quad (3.62b)$$

Da in erster Ordnung $p = X$ und $q = Y$ gilt, muß die Linearisierung des Systems (3.62) mit der Linearisierung von (3.55) übereinstimmen. Das System (3.55) haben wir bereits in Abschnitt 3.2.2 linearisiert. Es ist aber sinnvoll, dies hier in einer äquivalenten Form zu schreiben:

$$p' = -2p + q + \sum_{i+j>1} P_{ij} p^i q^j, \quad (3.63a)$$

$$q' = -\frac{9}{2}p + \frac{1}{2}q + \sum_{i+j>1} Q_{ij} p^i q^j. \quad (3.63b)$$

Gelingt es, die Koeffizienten x_{ij} und y_{ij} so zu bestimmen, daß $Q_{ij} = P_{ij} = 0$ für $1 < i + j \leq k$, so ist zu erwarten, daß die rücktransformierte Lösung des linearisierten Gleichungssystems für p und q in einer Umgebung des Fixpunktes eine bessere Approximation an die Lösungen der reduzierten Gleichungen ist als die Lösung, (3.15), des linearisierten Systems selbst.

Wir werden jetzt das Beispiel eines Polynoms zweiten Grades in p, q betrachten. Wir machen also den Ansatz

$$X = p + x_{11}pq + x_{20}p^2 + x_{02}q^2, \quad (3.64a)$$

$$Y = q + y_{11}pq + y_{20}p^2 + y_{02}q^2. \quad (3.64b)$$

Daraus ergibt sich

$$p = X - x_{20}X^2 - x_{02}Y^2 - x_{11}XY + \mathcal{O}(3), \quad (3.65a)$$

$$q = Y - y_{20}X^2 - y_{02}Y^2 - y_{11}XY + \mathcal{O}(3). \quad (3.65b)$$

Fordern wir nun, daß in den Differentialgleichungen¹² für p und q die Terme zweiter Ordnung in p, q verschwinden, so erhält man sechs Gleichungen für die sechs Koeffizienten

¹²Da die Differentialgleichungen für p und q recht unübersichtlich sind, wird hier auf ihre Wiedergabe verzichtet.

$x_{20}, x_{02}, x_{11}, y_{20}, y_{02}, y_{11}$. Das Gleichungssystem ist lösbar. Die Lösung lautet

$$x_{20} = \frac{5}{4\sqrt{21}} \quad x_{02} = \frac{1}{2\sqrt{21}} \quad x_{11} = -\frac{1}{4\sqrt{21}} \quad (3.66)$$

$$y_{20} = -\frac{11}{8\sqrt{21}} \quad y_{02} = \frac{5}{4\sqrt{21}} \quad y_{11} = -\frac{17}{8\sqrt{21}}. \quad (3.67)$$

Die Lösungen der linearisierten Gleichungen für p und q lauten

$$p(t) = e^{-\frac{3}{4}t} \left(X_0 \cos \frac{\sqrt{47}t}{4} + \frac{3X_0}{\sqrt{47}} \sin \frac{\sqrt{47}t}{4} \right) \quad (3.68a)$$

$$q(t) = \frac{1}{47} e^{-\frac{3}{4}t} \left(94Y_0 \cos \frac{\sqrt{47}t}{4} - 8\sqrt{47}Y_0 \sin \frac{\sqrt{47}t}{4} \right). \quad (3.68b)$$

Einsetzen dieser Lösung und der Koeffizienten in (3.64) liefert schließlich die Approximation

$$\begin{aligned} \tilde{X}(s) = \frac{1}{3948} X_0 e^{-\frac{3s}{2}} & \left(357\sqrt{21}X_0 + 3948e^{\frac{3s}{4}} \cos \frac{\sqrt{47}s}{4} + 160\sqrt{21}X_0 \cos \frac{\sqrt{47}s}{2} \right. \\ & \left. + 252\sqrt{47}e^{\frac{3s}{4}} \sin \frac{\sqrt{47}s}{4} - 16\sqrt{987}X_0 \sin \frac{\sqrt{47}s}{2} \right), \quad (3.69a) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \tilde{Y}(s) = -\frac{1}{7896} X_0 e^{-\frac{3s}{2}} & \left(-357\sqrt{21}X_0 - 15792e^{\frac{3s}{4}} \cos \frac{\sqrt{47}s}{4} + 592\sqrt{21}X_0 \cos \frac{\sqrt{47}s}{2} \right. \\ & \left. + 1344\sqrt{47}e^{\frac{3s}{4}} \sin \frac{\sqrt{47}s}{4} + 176\sqrt{987}X_0 \sin \frac{\sqrt{47}s}{2} \right) \quad (3.70) \end{aligned}$$

Vergleicht man jetzt eine der Kurven (3.69a), (3.70) mit der Lösungskurve der linearisierten Gleichung und einer numerischen Lösung des vollständigen Gleichungssystems, so sieht man, daß tatsächlich eine Verbesserung erreicht wird, Abbildung

Der Versuch, dieses Verfahren mit einem Polynom dritten Grades in p, q fortzuführen, verlief allerdings nicht so erfolgreich. Das Gleichungssystem war nicht eindeutig lösbar, und mit den drei frei wählbaren Koeffizienten x_{30}, y_{03}, y_{30} konnten die Kurven „aufs unsinnigste“ verzerrt werden, siehe Anhang A. Die Hoffnung, die drei Koeffizienten unter Berücksichtigung noch höherer Terme eindeutig bestimmen zu können, wurde nicht erfüllt. Dabei ist jedoch unklar, ob dies prinzipiell nicht möglich ist, oder ob die verwendeten MATHEMATICA-Algorithmen dazu nicht in der Lage waren. Die Prozesse wurden jedenfalls nach oft mehrtägigen antwortlosen Rechenzeiten abgebrochen, die MATHEMATICA-Notebooks auf Fehler überprüft und schließlich wieder mit längerer Laufzeit gestartet. Ein Ergebnis wurde nicht erzielt.

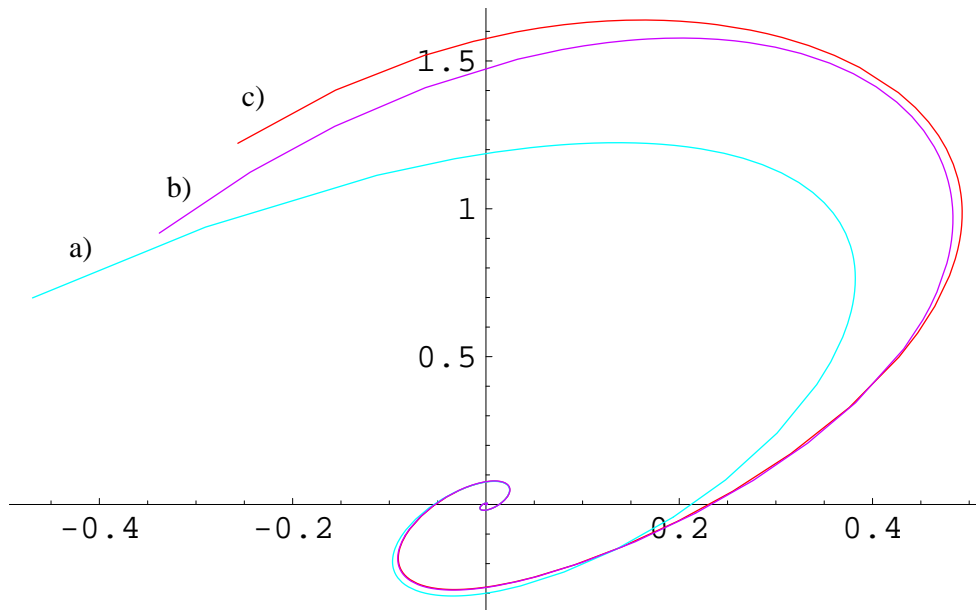


Abbildung 3.14: a) Eine Kurve $(\tilde{X}(s), \tilde{Y}(s))$, b) die entsprechende Lösung der Linearisierung, c) die entsprechende numerische Lösung.

Auch für die eigentlich motivierende Betrachtung der Poincaré-Abbildung hat diese Approximation keinen Gewinn gebracht, da aus ihr keine geschlossene Approximation der Poincaré-Abbildung ableitbar ist. Dazu wäre es nötig, die Gleichung

$$\tilde{Y}(s) = 2\tilde{X}(s) \quad (3.71)$$

nach s aufzulösen. Aufgrund der darin enthaltenen trigonometrischen Funktionen ist eine Lösung in geschlossener Form aber nicht möglich.

4. Physikalische Eigenschaften

Bisher wurden die Lösungen lediglich unter mathematischen Gesichtspunkten betrachtet. Daher wenden wir uns nun der physikalischen Interpretation zu.

Zunächst werden wir das qualitative Verhalten der Geodäten untersuchen. Anschließend werden die in der (inneren) Schwarzschild-Theorie üblichen Massenfunktionen eingeführt und ihre Bedeutung für Photonensterne erörtert.

Wir definieren einen charakteristischen Radius der Photonensterne. Dieser erlaubt uns eine charakteristische Masse zu definieren, die zusammen mit dem Radius einen Photonenstern vollständig charakterisiert.

Anschließend wenden wir uns der Temperaturverteilung zu und definieren eine charakteristische Temperatur des Photonensterns, die alternativ zur Masse als Parameter der Photonensterne dienen kann.

4.1. Qualitatives Verhalten der Geodäten

Aus den allgemeinen Eigenschaften der Lösungen von (2.8) können wir einige Aussagen über die Geodäten der entsprechenden Raumzeit ableiten. So kann z. B. die Frage der Erreichbarkeit der Singularität der Lösungen aus 3.2 im Ursprung geklärt werden.

Aufgrund der Symmetrieeigenschaften unserer Metrik gibt es zwei Killing-Vektorfelder, $\xi^a = \frac{\partial}{\partial t}$ und $\psi^a = \frac{\partial}{\partial \phi}$. Daraus folgt nach Abschnitt 1.2 die Existenz zweier Konstanten der geodätischen Bewegung, nämlich

$$E = -g_{ab}\xi^a u^b = f(r)\dot{t}, \quad \text{und} \quad L = g_{ab}\psi^a u^b = r^2\dot{\phi}, \quad (4.1)$$

wobei der Punkt für die Ableitung nach dem Parameter τ der Geodäte steht, und $u^a = \frac{dx^a}{d\tau}$ der Tangentenvektor an die Geodäte sei. Wählt man τ als Eigenzeit für zeitartige, und als affinen Parameter für lichtartige Geodäten, so erfüllt \mathbf{u} die Gleichung $g_{ab}u^a u^b = -\kappa$, mit $\kappa = 0$ für lichtartige und $\kappa = 1$ für zeitartige Geodäten. Unter Berücksichtigung der Bewegungskonstanten (4.1) bedeutet dies

$$-\kappa = -f(r)\dot{t}^2 + h(r)\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 \quad (4.2a)$$

$$= -\frac{E^2}{f(r)} + h(r)\dot{r}^2 + \frac{L^2}{r^2} . \quad (4.2b)$$

Dies ist äquivalent zu

$$\dot{r}^2 = \frac{E^2}{f(r)h(r)} - \frac{L^2}{h(r)r^2} - \frac{\kappa}{h(r)} . \quad (4.3a)$$

$$= \frac{E^2 r^2 - f(r)L^2 - \kappa f(r)}{h(r)f(r)r^2} . \quad (4.3b)$$

Die rechte Seite von (4.3b) definieren wir als $V(r)$. Reelle Lösungen von (4.3) existieren nur dann, wenn $V(r) \geq 0$. Dies können wir nun ausnutzen:

Null-Geodäten

Für Null-, also lichtartige Geodäten gilt $\kappa = 0$. Betrachten wir zunächst den Fall $L \neq 0$. Aus (4.3) wird dann

$$V(r) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(r) \leq \frac{E^2}{L^2} r^2 . \quad (4.4)$$

Dies ähnelt dem Fall eines Teilchens der Energie $\frac{E^2}{L^2} r^2$ in einem Potential $f(r)$. Da $\lim_{r \rightarrow 0} f(r) > 0$, auch für die Kleinschen Lösungen, wird die Parabel $\frac{E^2}{L^2} r^2$ f in mindestens einem Punkt r_0 schneiden, sodaß für $r \geq r_0$ auch $V(r) \geq 0$ erfüllt ist. Wie Abbildung 4.1 zeigt, kann es aber noch bis zu zwei weitere Schnittpunkte geben. Es gibt dann einen äußeren für Null-Geodäten erlaubten Bereich, in dem Photonen lediglich von dem Photonenstern gestreut werden, sowie einen inneren erlaubten Bereich, der eine Kugelschale darstellt, in der Photonen quasi um den Photonenstern herum kreisen. Die entsprechenden Geodäten kann man als gebundene Photonenzustände interpretieren. Getrennt werden diese beiden erlaubten Bereiche durch eine Kugelschale, in der keine

nichtradialen Geodäten möglich sind. Schließlich gibt es eine untere Grenze r_- so, daß für $r < r_-$ keine geodätische Bewegung mehr möglich ist. Nichtradiale Photonen können daher nicht bis in den Ursprung $r = 0$ vordringen. Dies gilt auch für Kleinsche Metriken.

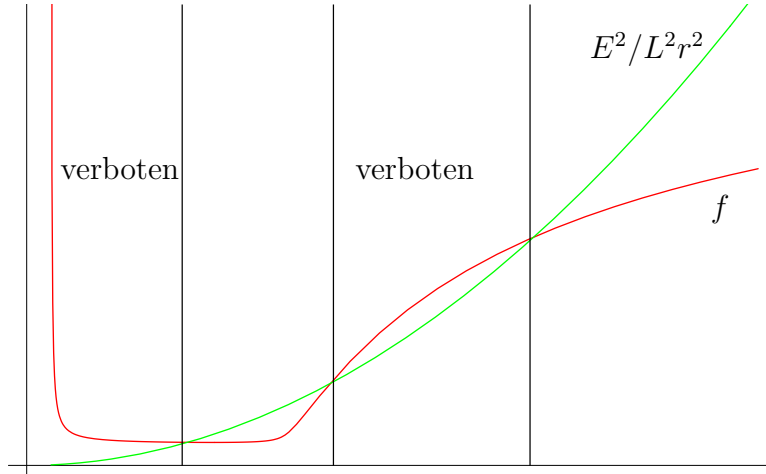


Abbildung 4.1: Das effektive Potential für nichtradiale Null-Geodäten

Im Falle $L = 0$ gibt (4.3)

$$V(r) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad E^2 \geq 0 \quad . \quad (4.5)$$

Dies ist immer erfüllt. Radial einfallende Photonen können also auch in den Metriken aus 3.2 bis $r = 0$, also zur Singularität im Ursprung vordringen. Der Fall $E = 0$ ist physikalisch nicht von Interesse, da dies Photonen mit Energie 0 entspricht.

Zeitartige Geodäten

Beginnen wir mit dem Fall $L = 0$. Wir erhalten dann

$$V(r) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad E^2 \geq f(r) \quad . \quad (4.6)$$

Im allgemeinen werden diese Geodäten auf eine Kugelschale $r_- \leq r \leq r_+$ beschränkt sein ($r_- = 0$ für Kleinsche Lösungen). Da f jedoch ein Minimum hat, existiert ein $E_{min} := \min f(r)$, sodaß die Geodäten wiederum nur durch ein r repräsentiert wird. Für $E < E_{min}$ existieren keine Geodäten. Im Fall $L \neq 0$ wird die Kugelschale, in der Bewegung möglich ist, aufgrund der Positivität von $f(r)L^2$ schmaler. Für Kleinsche Metriken ist $f_K(0)$ endlich. Daher können Teilchen mit $E^2 \geq f_K(0)$ den Ursprung erreichen. Da die Kleinschen Metriken im Ursprung aber eben nicht singular sind, ist das nicht kritisch. Zusammenfassend können wir feststellen, daß die Singularität im Ursprung lediglich von radialen Null-Geodäten erreicht werden kann. Die Singularität bleibt daher der restlichen Raumzeit nicht gänzlich verborgen, wie es das Prinzip der „kosmische Zensur“ fordert. Da sich diese Sichtbarkeit der Singularität aber auf radiale Null-Geodäten beschränkt, könnte man sie evtl. als lediglich „halbnackt“ bezeichnen.

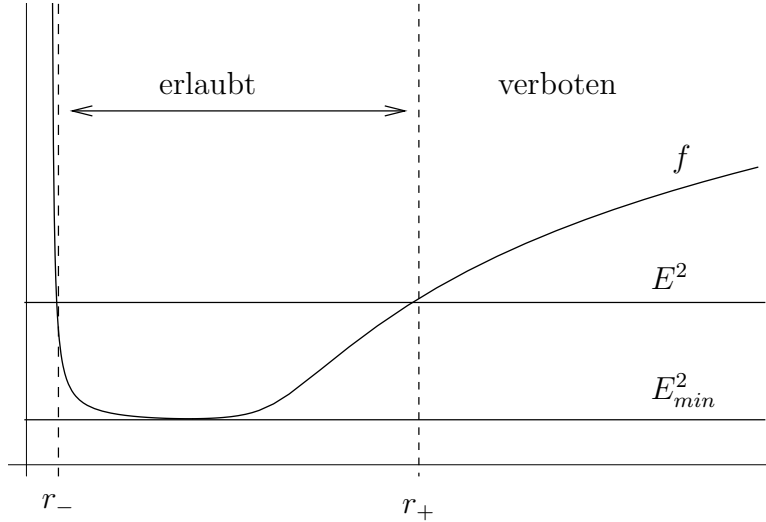


Abbildung 4.2: Effektives Potential für zeitartige Geodäten

4.2. Die Massenfunktionen

Wir kommen jetzt zu den physikalischen Parametern eines Photonensterns. Dazu betrachten wir noch einmal Gleichung (2.1a):

$$8\pi\rho = \frac{h'}{rh^2} + \frac{h-1}{hr^2}. \quad (4.7)$$

Dies lässt sich auch schreiben

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[r \left(1 - \frac{1}{h} \right) \right] = 8\pi\rho, \quad (4.8)$$

denn

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[r \left(1 - \frac{1}{h} \right) \right] = \frac{1}{r^2} \left[(1 - h^{-1}) + r \frac{h'}{h^2} \right] \quad (4.9)$$

$$= \frac{1 - h^{-1}}{r^2} + \frac{h'}{rh^2} \quad (4.10)$$

$$= \frac{h-1}{hr^2} + \frac{h'}{rh^2}. \quad (4.11)$$

Daraus folgt direkt

$$r \left[1 - \frac{1}{h(r)} \right] = 8\pi \int \rho(r') r'^2 dr' + m(0), \quad (4.12)$$

wobei $m(0)$ eine Integrationskonstante ist. Wir führen eine neue Funktion $m(r)$ ein durch

$$m(r) := 4\pi \int_0^r \rho(r') r'^2 dr' + m(0), \quad (4.13)$$

und schreiben h schließlich

$$h(r) = \left[1 - \frac{2m(r)}{r} \right]^{-1}. \quad (4.14)$$

Diese Beziehung gilt in allen statischen, sphärisch symmetrischen Raumzeiten, deren Energie-Impuls-Tensor eine ideale Flüssigkeit beschreibt.

In üblichen Sternenmodellen wird $\lim_{r \rightarrow 0} h(r) = 1$ gefordert, um die Regularität der Metrik auf den $t = \text{const.}$ Hyperflächen zu gewährleisten. Daraus folgt dann $m(0) = 0$. Weiterhin wird angenommen, daß es ein $R > 0$ gibt so, daß $\rho(r) = 0$ für $r > R$. Die Lösung (4.14) kann dann mit einer äußeren Schwarzschild-Lösung der Masse $M = m(R)$ fortgesetzt werden.

Die Bedeutung von $m(r)$ als Massenfunktion erschließt sich in der Newtonschen Näherung für schwache Gravitationsfelder. Dazu schreiben wir zunächst

$$f(r) = e^{\phi(r)}. \quad (4.15)$$

Aus Gleichung (2.1b) wird damit

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{m(r) + 4\pi r^3 p}{r(r - 2m(r))}. \quad (4.16)$$

In der Newtonschen Näherung für schwache Gravitationsfelder verlangt man $r^3 P \ll m(r)$ und $m(r) \ll r$, und erhält damit

$$\frac{d\phi}{dr} \approx \frac{m(r)}{r^2}. \quad (4.17)$$

Das ist die sphärisch symmetrische Poisson-Gleichung für das Newtonsche Gravitationspotential, sodaß

$$\phi = \frac{1}{2} \ln f \quad (4.18)$$

in der Newtonschen Näherung als Potential des Gravitationsfeldes interpretiert werden kann.

Im Falle der Photonensterne werden die für diese Interpretation notwendigen Voraussetzungen allerdings nicht erfüllt, denn auch im Fernfeld ist die Metrik eines Photonensterns von der des flachen Raumes deutlich verschieden. Für große r gilt ($C = 1$) $f(r) \approx \sqrt{7/3}r$, sodaß die Abweichung von der flachen Metrik ($f = 1$) proportional zu r wächst. Es kann also nicht von einem schwachen Feld gesprochen werden

Im Fernfeld, also für große r , gilt $h \approx \frac{7}{4}$ und daraus folgend

$$m(r) \approx \frac{r}{2} \left(1 - \frac{4}{7} \right) = \frac{3}{14}r. \quad (4.19)$$

Für $C = 1$ haben wir weiterhin aus (2.3) und (2.4)

$$\rho(r) = \frac{1}{8\pi f^2(r)}, \quad (4.20)$$

und mit der Zustandsgleichung $\rho = 3p$

$$p(r) = \frac{1}{24\pi f^2(r)}. \quad (4.21)$$

Da für große r die Näherung $f(r) \approx \sqrt{\frac{7}{3}}r$, $C = 1$, gilt, folgt

$$p(r) \approx \frac{1}{24\pi} \frac{3}{7r^2} = \frac{1}{56\pi} \frac{1}{r^2}. \quad (4.22)$$

Es folgt schließlich mit (4.19)

$$\frac{m(r)}{r^3 p} \approx \frac{4\pi}{3}, \quad r \gg 0. \quad (4.23)$$

Also wäre im Fernfeld bei Newtonscher Näherung

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{m(r) + 4\pi \frac{3}{4\pi} m(r)}{r(r - \frac{3}{14}r)} = \frac{56}{11} \frac{m(r)}{r^2}. \quad (4.24)$$

Auch das zeigt, daß wir $m(r)$ hier nicht als relativistisches Analogon zur Newtonschen gravitierenden Masse betrachten dürfen.

Die in 3.5 eingeführte Schwarzschild-Approximation erlaubt es aber, $m(r)$ im Approximationsbereich als die Masse eines hypothetischen schwarzen Loches, bzw. eines anderen isolierten Körpers mit gleicher Masse zu interpretieren.

Betrachten wir den Verlauf von $m(r)$ für eine nicht-kleinsche Lösung. Es gilt dann für kleine r (vgl. (3.6))

$$h(r)^{-1} = \frac{A}{Br} + 1 + \mathcal{O}(r^4), \quad (4.25)$$

und $A > 0$, damit $h(r) > 0$. Damit $f(r) > 0$ für alle r , muß auch $B > 0$ gelten. Also folgt $\lim_{r \rightarrow 0} h(r) = 0$ und somit $m(0) \neq 0$. Löst man (4.14) nach $m(r)$ auf,

$$m(r) = \frac{r}{2} \left[1 - \frac{1}{h(r)} \right], \quad (4.26)$$

und setzt (4.25) ein, so erhält man

$$m(r) = \frac{r}{2} \left[1 - \frac{A}{Br} - 1 - \mathcal{O}(r^4) \right], \quad (4.27)$$

und damit

$$m(0) = -\frac{A}{2B} < 0 \quad (4.28)$$

Die Masse in der Umgebung des Ursprungs ist also negativ. Das verwundert zwar zunächst, ist aber im wesentlichen doch unproblematisch, da wie oben erläutert die übliche Interpretation ohnehin versagt. Ernsthaftige Schwierigkeiten würde diese „negative Masse“ erst bereiten, wenn aufgrund eines Versagens des Modells der idealen Flüssigkeit eine

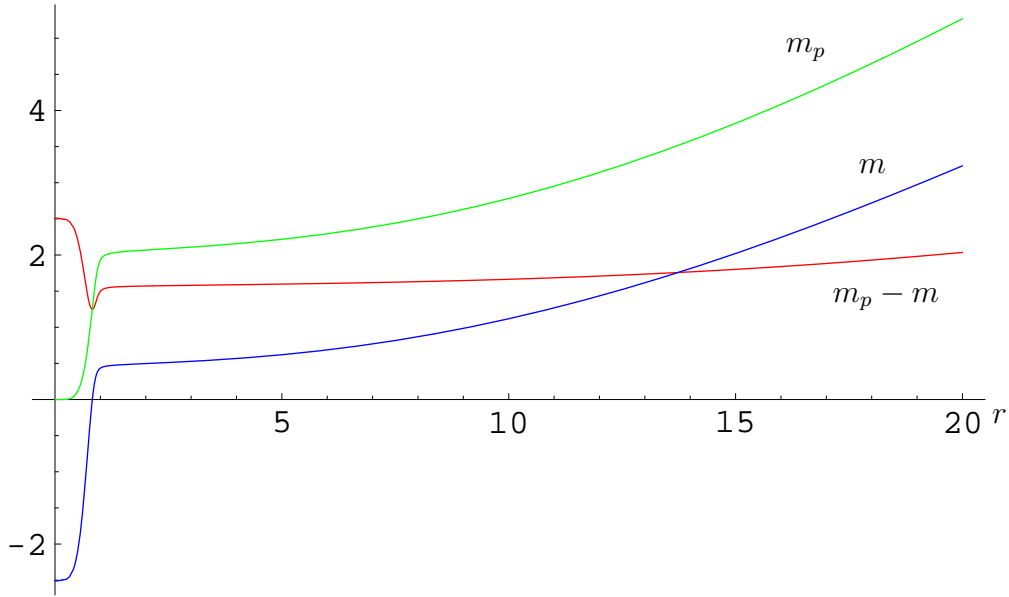


Abbildung 4.3: Massenfunktionen

äußere Schwarzschild-Lösung angeschlossen werden müßte. Diese hätte dann eine negative Masse, die aufgrund der asymptotischen Flachheit der äußeren Schwarzschild-Metrik auf die oben erläuterte Weise interpretiert werden müßte.

Die Funktion $m(r)$ stellt also lediglich die innerhalb des Koordinatenradius r eingeschlossenen Energie dar. Das Volumen-Element der Hyperflächen $t = \text{const.}$ ist aber $h^{1/2}r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$, sodaß wir noch die Eigenmasse

$$m_p(r) = \int_0^r \rho(r') r'^2 h(r) = \left[1 - \frac{2m(r')}{r'} \right]^{-1/2} dr' \quad (4.29)$$

definieren können. Die Differenz $m_p(r) - m(r)$ wird dann üblicherweise als Bindungsenergie interpretiert. Den typischen Verlauf von m , m_p und $m_p - m$ zeigt Abbildung 4.2. Um nun einem Photonenstern eine charakteristische Masse als Parameter zuzuordnen, definieren wir zunächst einmal den charakteristischen Radius eines Photonensterns R durch

$$h'(R) = 0. \quad (4.30)$$

Die charakteristische Masse M definieren wir dann als

$$M = m(R). \quad (4.31)$$

Aus (4.26) folgt direkt, daß die Angabe von R und M äquivalent ist zu Anfangsbedingungen $h'(R) = 0$ und $h(R) = (1 - 2M/R)^{-1}$. R und M sind also geeignet, die Lösungen der Grundgleichungen vollständig zu parametrisieren.

Da $h(r)$ invariant ist unter den Skalentransformationen aus 2.1 , folgt aus (4.14) für die Massenfunktion das Skalierungsverhalten

$$\tilde{m}(\tilde{r}) := \frac{\tilde{r}}{2} \left[1 - \frac{1}{\tilde{h}(\tilde{r})} \right] \quad (4.32)$$

$$= \frac{\lambda r}{2} \left[1 - \frac{1}{h(r)} \right] \quad (4.33)$$

$$= \lambda m(r), \quad (4.34)$$

mit den Bezeichnungen aus 2.1, insbesondere $\tilde{r} = \lambda r$. Da auch

$$\tilde{h}'(\tilde{r}) = \frac{1}{\lambda} h'(\tilde{r}/\lambda), \quad (4.35)$$

folgt für den charakteristischen Radius unter Skalierung

$$\tilde{R} = \lambda R. \quad (4.36)$$

Zusammen mit (4.32) ergibt sich daraus, daß eine Lösungskurve in der x - y -Ebene Photonensterne mit gleichem Verhältnis R/M repräsentiert.

Die Definition des charakteristischen Radius als Maximalstelle von h erlaubt eine Abschätzung der Masse des Photoniensterns durch Massen äußerer Schwarzschild-Lösungen. Es gilt aufgrund der asymptotischen Form

$$h(R) > \frac{7}{4} = \lim_{r \rightarrow \infty} h(r). \quad (4.37)$$

Zusammen mit (4.14) folgt daraus

$$\frac{3}{7} \frac{R}{2} < M < \frac{R}{2}. \quad (4.38)$$

$R/2$ ist aber genau die Masse $M_S(R)$ eines isolierten ($\rho = 0$ für $r > R$) Sterns vom Radius R in der äußeren Schwarzschild-Metrik. Für $h(R) \gg 1$ ist $(1 - h^{-1}(R)) \approx 1$, also $M \approx M_S(R)$.

4.3. Temperatur

Nach den Überlegungen aus Abschnitt 1.4 genügt das Temperaturfeld eines statischen, sphärisch symmetrischen Photonengases der Tolman-Gleichung (1.60). Dabei gilt lokal das Stefan-Boltzmann Gesetz

$$\rho(r) = aT^4(r). \quad (4.39)$$

Wir können damit die Temperatur an der Stelle R als charakteristische Temperatur eines Photoniensterns definieren,

$$T_R := T(R). \quad (4.40)$$

An der Stelle $r = R$ können wir ρ aber durch h ausdrücken, und daher auch durch M . Wir betrachten dazu noch einmal die Gleichung (2.1a),

$$8\pi\rho = \frac{h'}{rh^2} + \frac{h-1}{hr^2}.$$

An der Stelle $R = 0$ gilt definitionsgemäß $h'(R) = 0$, also

$$8\pi\rho(R) = \frac{h(R) - 1}{h(R)R^2}. \quad (4.41)$$

Unter Berücksichtigung von $M = \frac{R}{2}(1 - h^{-1}(R))$ erhalten wir daraus

$$\rho(R) = \frac{M}{R^3}. \quad (4.42)$$

Damit folgt schließlich für die charakteristische Temperatur eines Photonensterns

$$T_R = \left(\frac{1}{a} \frac{M}{R^3} \right)^{\frac{1}{4}}. \quad (4.43)$$

Wir sehen daraus, daß wir alternativ zu dem Paar (R, M) auch (R, T_R) zur Charakterisierung der Lösungen heranziehen können.

Zahlenbeispiele

Wir wollen nun noch zwei einfache Zahlenbeispiele betrachten. Dazu wechseln wir von den bisher benutzten geometrischen Einheiten zu SI-Einheiten. In (4.43) ist $\frac{M}{R^3}$ eine Energiedichte. Wählen wir M in SI-Einheiten weiter als Masse und nicht als Energie, so müssen wir M in (4.43) mit c^2 multiplizieren. Wir erhalten also

$$T_R = \left(\frac{1}{a} \frac{c^2 M}{R^3} \right)^{\frac{1}{4}}. \quad (4.44)$$

Die Konstante a ist in SI-Einheiten gegeben durch

$$a = \frac{\pi^2 k^4}{15 \hbar^3 c^3}. \quad (4.45)$$

Setzen wir für M die Masse $m_{\oplus} \approx 6 \cdot 10^{24} kg$ der Erde ein und für R ihren Schwarzschildradius $r_{S\oplus} \approx 9 \cdot 10^{-3}$, so erhalten wir als Temperatur $T_R \approx 6 \cdot 10^{15} K$. Das entspricht einer Wellenlänge von etwa $3 \cdot 10^{-18} m$, also einer sehr harten Gammastrahlung.

Auch für Schwarzschildradius und Masse der Sonne ergibt sich eine harte Gammastrahlung. Es ist $m_{\odot} \approx 2 \cdot 10^{30} kg$ und $r_{S\odot} \approx 3 \cdot 10^4 m$. Daraus ergibt sich eine charakteristische Temperatur $T_P \approx 10^3 K$. Das entspricht einer Wellenlänge $\lambda \approx 3 \cdot 10^{-16}$, also immer noch einer harten Gammastrahlung. Größere Wellenlängen erhält man erst für größere Radien.

Die Temperatur als Parameter eines Photonensterns hat gegenüber der charakteristischen Masse den Vorteil, nicht mit den Interpretationsschwierigkeiten belastet zu sein, die aus der fehlenden asymptotischen Flachheit der Lösungen resultieren.

5. Diskussion

Wir haben im vorliegenden Text Eigenschaften von Lösungen der Einsteinschen Feldgleichungen besprochen, die ein statisches, sphärisch symmetrisches Photonengas beschreiben. Dabei unberücksichtigt blieb die physikalische Relevanz dieser Lösungen. Diese ist auch nicht leicht zu erfassen.

Alle besprochenen Lösungen sind in mindestens einem Punkt nicht unproblematisch. Die exakte Lösung (3.1) hat eine im Ursprung divergente Energiedichte, die Nicht-Kleinschen Lösungen aus Abschnitt 3.2 sind im Ursprung singulär und die Kleinschen Lösungen schließlich sind aufgrund der Sensibilität in den Anfangsbedingungen nicht stabil gegenüber kleinen Variationen der Krümmung. Allen Lösungen gemein ist zudem, daß sie nicht asymptotisch flach sind, was sie einer einfachen Interpretation z. B. der Massenfunktionen unzugänglich macht.

Dennoch zeigen diese numerischen Betrachtungen, daß kompakte Konfigurationen eines Photonengases, also eben Photonensterne denkbar sind.

Größere Bedeutung kommt diesen Lösungen evtl. bei Betrachtungen der Hawking-Strahlung zu. In Hawkings Herleitung dieser Strahlung ([1]) werden Quantenfelder in einer kollabierenden Metrik studiert, die den Entstehungsprozeß eines schwarzen Loches modelliert. Dabei wird angenommen, daß einerseits die Raumzeit außerhalb des kollabierenden Sterns durch eine Vakuumlösung der Einsteinschen Feldgleichungen beschrieben wird, und es andererseits einen Ereignishorizont gibt. Als Resultat wird dann ein thermisches Spektrum in den Raum außerhalb des sich formierenden schwarzen Loches emittiert. Weiter wird angenommen, daß sich das schwarze Loch nur langsam entwickelt, solange seine Masse groß genug ist ($M \gg M_P \approx 10^{-5}g$). Das schwarze Loch soll dann durch eine Folge von stationären Lösungen approximiert werden können, in denen man das emittierte Spektrum berechnen kann.

Die Untersuchungen dieser Arbeit zeigen aber, daß zumindest im thermischen Gleichgewicht die Metrik eines Photonengases *keinen* Ereignishorizont hervorruft und die Lösungen für den strahlungsgefüllten Raum von grundsätzlich anderem Charakter sind als die bekannten Schwarzschild-Lösungen des Vakuums. Ein klassisches statisches schwarzes Loch, daß von einer Strahlungswolke umgeben ist, scheint jedenfalls nicht möglich zu sein. Strahlung und Ereignishorizont stehen im statischen, sphärisch symmetrischen Fall im Widerspruch zu einander.

Auch wenn es sich bei der Hawking-Strahlung um einen nur mit quantentheoretischen Mitteln zu verstehenden Effekt handelt, sind ob der Unvollständigkeit der Theorien der Quantengravitation Hinweise aus rein klassischen Betrachtungen vielleicht hilfreich.

Das Problem der Rückwirkung der Hawking-Strahlung auf die Metrik ist bekannt. Ansätze wurden bereits in Hawkings Originalarbeit angesprochen. Neuere Ansätze findet man zum Beispiel in [4] und [3]. Das in [3] benutzte Modell setzt aber wieder voraus, daß die Metrik asymptotisch in eine Schwarzschild-Metrik übergeht.

Endgültig wird sich die Frage nach der Rückwirkung der Hawking-Strahlung auf die Metrik erst mit einer vollständigen Quantentheorie der Gravitation beantworten lassen.

A. Polynome 3. Grades in p, q

Verlangt man bei dem Verfahren aus 3.6, daß die resultierende Differentialgleichung für p, q bis zur dritten Ordnung linear bleibt, so ergibt sich zusätzlich zu den bereits genannten Koeffizienten

$$x_{03} = \frac{4009}{163296} - \frac{28}{729}x_{30} - \frac{20}{243}y_{30} \quad (\text{A.1})$$

$$x_{12} = -\frac{53}{2592} + \frac{10}{27}x_{30} + \frac{16}{81}y_{30} \quad (\text{A.2})$$

$$y_{12} = -\frac{12769}{36288} - \frac{8}{9}x_{30} + \frac{70}{81}y_{30} \quad (\text{A.3})$$

$$x_{21} = -\frac{8}{9}x_{30} - \frac{2}{9}y_{30} \quad (\text{A.4})$$

$$y_{21} = \frac{53}{288} + x_{30} - \frac{13}{9}y_{30} \quad (\text{A.5})$$

Durch Variation der freien Parameter kann man einige „wilde“ Kurven erzielen, siehe Abbildung A.1.

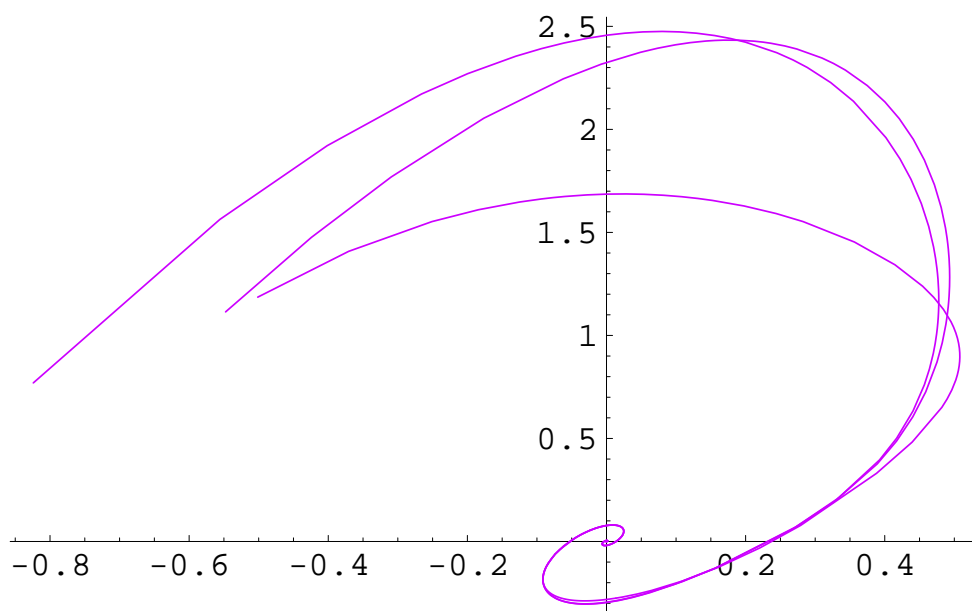


Abbildung A.1: Variation der freien Parameter im Approximationsverfahren 3. Ordnung

B. Weitere Grundbegriffe der Differentialgeometrie

Differenzierbare Abbildungen

Sei $f : M \rightarrow N$ eine Abbildung von einer m -dimensionalen Mannigfaltigkeit M auf eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit N . Ein Punkt $p \in M$ wird dann auf einen Punkt

$f(p) \in N$ abgebildet. Sei nun (U, ϕ) eine Karte von M und (V, ψ) eine Karte von N mit $p \in U$ und $f(p) \in V$. Dann hat f eine Koordinatendarstellung $\psi f \phi^{-1} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$. Die Abbildung f heißt genau dann differenzierbar, wenn $\psi f \phi^{-1}$ differenzierbar ist. Diese Definition ist aufgrund der Differenzierbarkeit der Übergangsfunktionen ψ_{ij} aus Definition 2 unabhängig von der Wahl der Karten, wie sich leicht prüfen läßt. Eine Funktion auf M ist eine differenzierbare Abbildung von M nach \mathbb{R} . Die Menge der Funktionen auf M bezeichnen wir mit $\mathcal{F}(M)$.

Vektoren

Eine (offene) Kurve in M ist eine differenzierbare Abbildung $c : (a, b) \rightarrow M$, wobei $(a, b) \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall mit $a < 0 < b$ ist. Vektoren lassen sich durch Richtungsableitungen einer Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ entlang der Kurve c definieren. Diese ist an der Stelle $t = 0$ gegeben durch

$$\left. \frac{df(c(t))}{dt} \right|_{t=0}. \quad (\text{B.1})$$

In einer Karte (U, ϕ) mit Koordinaten $\{x^\mu\}$ wird daraus

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu(c(t))}{dt} \right|_{t=0}, \quad (\text{B.2})$$

wobei $\partial f / \partial x^\mu$ eine auch im weiteren verwendete Kurzschreibweise für $\partial(f \phi^{-1}(x)) / \partial x^\mu$ ist. Da die Funktion f beliebig ist, kann man sagen, daß die Kurve c einen Differentialoperator \mathbf{X} definiert, der angewandt auf eine Funktion f die Richtungsableitung dieser Funktion entlang der Kurve c an der Stelle $t = 0$ liefert. \mathbf{X} hat die Darstellung

$$\mathbf{X} = X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad \text{mit} \quad X^\mu = \left. \frac{dx^\mu(c(t))}{dt} \right|_{t=0}. \quad (\text{B.3})$$

Wir nennen \mathbf{X} den *Tangentialvektor* an die Kurve c , und schreiben für seine Anwendung auf eine Funktion $\mathbf{X}[f]$. Da es viele Kurven gibt, die zu ein und dem selben Tangentialvektor führen, identifiziert man einen gegebenen Tangentialvektor mit einer Äquivalenzklasse von Kurven. Zwei Kurven c_1, c_2 sind dann äquivalent, wenn $c_1(0) = c_2(0) = p$ und $dx^\mu(c_1(t))/dt|_{t=0} = dx^\mu(c_2(t))/dt|_{t=0}$. Man beachte, daß diese Definition eines Vektors unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems ist.

Die Tangentialvektoren, also Äquivalenzklassen von Kurven, an einem Punkt $p \in M$ bilden einen Vektorraum, wie leicht einzusehen ist. Dieser Raum wird *Tangentialraum* an den Punkt p genannt und mit $T_p M$ bezeichnet¹³. Die Dimension des Tangentialraumes entspricht der Dimension der zugrundeliegenden Mannigfaltigkeit M . Offensichtlich bilden die $\partial / \partial x^\mu$ eine Basis von $T_p M$. Wir schreiben $\mathbf{e}_\mu = \partial / \partial x^\mu$. Ein Vektor $\mathbf{V} \in T_p M$ hat damit die Koordinatendarstellung $\mathbf{V} = V^\mu \mathbf{e}_\mu$. Die V^μ heißen (kontravariante) *Komponenten* von \mathbf{V} bezüglich der Basis $\{\mathbf{e}_\mu\}$.

Sind zwei Koordinatensysteme x und y gegeben, so hat der Vektor \mathbf{X} zwei Koordinatendarstellungen, nämlich

$$\mathbf{X} = X^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} = \tilde{X}^\mu \frac{\partial}{\partial y^\mu}. \quad (\text{B.4})$$

¹³Seine Elemente nennen wir verkürzend einfach Vektoren.

Folglich transformieren sich die Komponenten des Vektors gemäß

$$\tilde{X}^\mu = X^\nu \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\nu}. \quad (\text{B.5})$$

Es ist diese Transformationseigenschaft, die in der älteren Literatur herangezogen wird, um ein Zahlentupel als kontravariante Komponenten eines Vektors zu identifizieren. Umgekehrt folgt aber auch

$$\mathbf{e}_\nu = \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\nu} \tilde{\mathbf{e}}_\mu, \quad (\text{B.6})$$

mit $\mathbf{e}_\mu = \partial/\partial x^\mu$ und $\tilde{\mathbf{e}}_\mu = \partial/\partial y^\mu$. Das Transformationsverhalten der Basisvektoren ist also genau umgekehrt zu dem der Komponenten. Ein solches Transformationsverhalten heißt *kovariant*.

Kotangentialvektoren

Als nächstes wollen wir die linearen Abbildungen von $T_p M$ nach \mathbb{R} betrachten. Aus der linearen Algebra (vgl. z. B. [17]) ist bekannt, daß die linearen Abbildungen eines Vektorraumes nach \mathbb{R} ebenfalls einen Vektorraum bilden, den *Dualraum*. Der Dualraum eines Tangentialraumes wird *Kotangentialraum* genannt und mit $T_p^* M$ bezeichnet, seine Elemente werden *Kotangentialvektoren*, *Dualvektoren* oder *1-Formen* genannt.

Einer Funktion f auf M kann ein Kotangentialvektor $\mathbf{d}f \in T_p^* M$ zugeordnet werden, das Differential von f . Seine Wirkung auf einen Vektor $\mathbf{V} \in T_p M$ definieren wir durch die Wirkung von \mathbf{V} auf f :

$$\langle \mathbf{d}f, \mathbf{V} \rangle := \mathbf{V}[f] = V^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \in \mathbb{R}. \quad (\text{B.7})$$

Die Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : T_p^* M \otimes T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *inneres Produkt*, sie ist offensichtlich bilinear. Eine Basis, genauer die duale Basis, des Kotangentialraumes erhalten wir aus den Koordinatenfunktionen $\{x^\mu\}$, denn es gilt

$$\langle \mathbf{d}x^\mu, \mathbf{e}_\nu \rangle = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu} = \delta_\nu^\mu. \quad (\text{B.8})$$

Ein beliebiger Kotangentialvektor $\omega \in T_p^* M$ hat dann in einer Karte die Darstellung

$$\omega = \omega_\mu \mathbf{d}x^\mu. \quad (\text{B.9})$$

Man beachte, daß wir hier zwar Koordinatendarstellungen zurückgreifen, ein Kotangentialvektor aber ohne Bezug auf ein Koordinatensystem definiert ist. Sind zwei Koordinatendarstellungen, also Karten, gegeben, so folgt aus

$$\omega = \omega_\mu \mathbf{d}x^\mu = \tilde{\omega}_\nu \mathbf{d}y^\nu \quad (\text{B.10})$$

das Transformationsverhalten

$$\tilde{\omega}_\nu = \omega_\mu \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\nu} \quad \text{und} \quad \mathbf{d}y^\nu = \frac{\partial y^\nu}{\partial x^\mu} \mathbf{d}x^\mu. \quad (\text{B.11})$$

Die Komponenten eines Kotangentialvektors transformieren sich also kontravariant, die duale Basis kovariant. Wir werden später mittels des metrischen Tensors einen Isomorphismus von Vektoren und Kotangentialvektoren definieren, der es uns schließlich erlaubt von ko- und kontravarianten Komponenten eines *Vektors* zu sprechen.

Tensoren

Wir können nun allgemein multilineare Objekte, genannt Tensoren, auf M definieren:

Definition 6. Ein *Tensor* im Punkte $p \in M$ vom Typ (q,r) ist eine multilineare Abbildung $\mathbf{T} : \underbrace{T_p^*M \times \cdots \times T_p^*M}_{q\text{-mal}} \times \underbrace{T_pM \times \cdots \times T_pM}_{r\text{-mal}} \rightarrow \mathbb{R}$.

Tensoren haben allgemein die Koordinatendarstellung

$$\mathbf{T} = T^{\mu_1 \dots \mu_q}{}_{\nu_1 \dots \nu_r} \frac{\partial}{\partial x^{\mu_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial x^{\mu_q}} \mathbf{d}x^{\nu_1} \cdots \mathbf{d}x^{\nu_r}. \quad (\text{B.12})$$

Wir schreiben für die Wirkung eines Tensors auch

$$\mathbf{T}(\omega_1, \dots, \omega_q; \mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_r) = T^{\mu_1 \dots \mu_q}{}_{\nu_1 \dots \nu_r} \omega_{1\mu_1} \cdots \omega_{q\mu_q} V_1^{\nu_1} \cdots V_r^{\nu_r} \quad (\text{B.13})$$

Tensorfelder

Bisher haben wir geometrische Objekte nur an einem Punkt $p \in M$ definiert. Eine natürliche Fortsetzung sind die Tensorfelder. Wir beginnen mit dem einfachsten Fall, einem Vektorfeld:

Sei \mathbf{V} eine Abbildung, die jedem Punkt $p \in M$ einen Vektor $\mathbf{V}|_p \in T_pM$ zuordnet. Dann ist für jede differenzierbare Funktion $f \in \mathcal{F}(M)$ $\mathbf{V}|_p[f]$ eine Zahl in \mathbb{R} , und also $\mathbf{V}[f]$ wieder eine Abbildung von M nach \mathbb{R} . Ist diese Abbildung für alle differenzierbaren Funktionen f wieder differenzierbar, so nennen wir \mathbf{V} ein *Vektorfeld*. Auf analoge Weise definieren wir Tensorfelder. Die Menge aller Vektorfelder auf M wird mit $\mathcal{H}(M)$ bezeichnet, die Menge der dualen Vektorfelder mit $\Omega^1(M)$ und die Menge der Tensorfelder vom Typ (q,r) mit $\mathcal{T}^q(M)$.

Kommutator

Wir definieren den *Kommutator* $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$ zweier Vektorfelder durch

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]f := \mathbf{X}[\mathbf{Y}[f]] - \mathbf{Y}[\mathbf{X}[f]], \quad f \in \mathcal{F}(M). \quad (\text{B.14})$$

$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$ ist wieder ein Vektorfeld, denn in Koordinatendarstellung ergibt sich

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]f = X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(Y^\nu \frac{\partial f}{\partial x^\nu} \right) - Y^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(X^\nu \frac{\partial f}{\partial x^\nu} \right) \quad (\text{B.15})$$

$$= X^\mu Y^\nu \frac{\partial^2 f}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + X^\mu \left(\frac{\partial Y^\nu}{\partial x^\mu} \right) \frac{\partial f}{\partial x^\nu} - Y^\mu X^\nu \frac{\partial^2 f}{\partial x^\nu \partial x^\mu} - Y^\mu \left(\frac{\partial X^\nu}{\partial x^\mu} \right) \frac{\partial f}{\partial x^\nu} \quad (\text{B.16})$$

$$= \left(X^\mu \frac{\partial Y^\nu}{\partial x^\mu} - Y^\mu \frac{\partial X^\nu}{\partial x^\mu} \right) \mathbf{e}_\nu[f]. \quad (\text{B.17})$$

Pullback einer Abbildung

Sei $f : M \rightarrow N$ eine differenzierbare Abbildung. Dann läßt sich eine Abbildung $f^* : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ definieren durch

$$(f^* \mathbf{V})[g] := \mathbf{V}[g \circ f], \quad g \in \mathcal{F}(N), \mathbf{V} \in T_p M. \quad (\text{B.18})$$

In Koordinaten x^μ auf M und y^ν auf N schreibt sich das mit $\mathbf{V} = V^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$

$$f^* \mathbf{V}[g] = \mathbf{V}[g \circ f] \quad (\text{B.19})$$

$$= V^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} g(f(x)) \quad (\text{B.20})$$

$$= V^\mu \frac{\partial f^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial y^\nu} g, \quad (\text{B.21})$$

also

$$(f^* \mathbf{V})^\nu = V^\mu \frac{\partial f^\nu}{\partial x^\mu} \quad (\text{B.22})$$

Dabei ist $f^\nu = x^\nu \circ f$ die Koordinatendarstellung von f . Auf ähnliche Weise induziert f eine weitere Abbildung $f_* : T_{f(p)}^* N \rightarrow T_p^* M$, genannt „Pullback“. Sie wird definiert durch

$$\langle f_* \omega, \mathbf{V} \rangle = \langle \omega, f^* \mathbf{V} \rangle, \quad \omega \in T_{f(p)}^* N, \mathbf{V} \in T_p M. \quad (\text{B.23})$$

Wir verallgemeinern die Abbildung f^* auf Tensoren vom Typ (q, r) durch

$$f^* \mathbf{T}(\omega_1, \dots, \omega_q; \mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_r) := \mathbf{T}(f_* \omega_1, \dots, f_* \omega_q; (f^{-1})^* \mathbf{V}_1, \dots, (f^{-1})^* \mathbf{V}_r). \quad (\text{B.24})$$

Tensorprodukt und Kontraktion

Zwei weitere wichtige Operationen mit Tensorfeldern sind das *Tensorprodukt* und die *Kontraktion*:

Definition 7. Sei $\mathbf{T}_1 \in \mathcal{T}_q^p$ und $\mathbf{T}_2 \in \mathcal{T}_{q'}^{p'}$. Dann heißt der Tensor $\mathbf{P} \in \mathcal{T}_{q+q'}^{p+p'}$, definiert durch

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\omega_1, \dots, \omega_p, u_1, \chi_1, \dots, \chi_{p'}; \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_q, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{q'}) \\ := \mathbf{T}_1(\omega_1, \dots, \omega_p, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_q) \mathbf{T}_2(\chi_1, \dots, \chi_{p'}, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{q'}) \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

das *Tensorprodukt* von \mathbf{T}_1 und \mathbf{T}_2 , geschrieben $\mathbf{T}_1 \otimes \mathbf{T}_2$.

Definition 8. Die *Kontraktion* eines Tensors bezüglich des i -ten kontravarianten und j -ten kovarianten „Slots“ ist eine Abbildung $C_{i,j} : \mathcal{T}_q^p \rightarrow \mathcal{T}_{q-1}^{p-1}$ definiert durch

$$C_{i,j} \mathbf{T} = \mathbf{T}(\dots, \mathbf{dx}^\mu, \dots; \dots, \mathbf{e}_\mu, \dots), \quad \mathbf{T} \in \mathcal{T}_q^p. \quad (\text{B.26})$$

Dabei sei $\{e_\mu\}$ eine Basis, $\{dx^\mu\}$ die duale Basis und dx^μ in den i -ten kontravarianten, e_μ in den j -ten kovarianten „Slot“ eingesetzt.

In der abstrakten Indexnotation (siehe Abschnitt „Notation“), ist der Bezug zu den „Slots“ deutlicher: Ein Tensor vom Typ $(2, 3)$ z. B. wird dort T^{ab}_{cde} geschrieben. Die Kontraktion über den ersten kontravarianten und zweiten kovarianten „Slot“ wird dann dargestellt durch T^{ab}_{cae} .

Abbildungsverzeichnis

1.1.	Die Abbildung ψ_{ij} bildet die Bilder der Schnittmenge $U_i \cap U_j$ differenzierbar aufeinander ab; die Karten sind miteinander „verträglich“	8
2.1.	Die Projektion des Richtungsfeldes auf den Orbitraum.	24
3.1.	Eine typische numerische Lösung von (2.8). Das Maximum von $h(r)$ liegt bei $r = r_0 = 1$	27
3.2.	Eine typische Energiedichte ρ . Sie entstammt einer Lösung, in der h sein Maximum an der Stelle $r = 1$ annimmt.	27
3.3.	Numerische Lösungen $f(r)$ für verschiedene C , skaliert wie im Text beschrieben.	28
3.4.	Numerische Lösungen $h(r)$ für verschiedene C , skaliert wie in Abbildung 3.3.	28
3.5.	Lösungen der reduzierten Gleichung	29
3.6.	$n \mapsto a_n ^{1/n}$, a_n : Entwicklungskoeffizienten von f_K	31
3.7.	Die Kleinsche Lösung zu $C = 1$ und $f_K(0) = 1$. f wurde zur besseren Übersicht mit dem Faktor $1/30$ multipliziert.	32
3.8.	Die Kleinsche Lösung in der reduzierten Darstellung (Mitte), mit zwei normalen Lösungen und der Asymptoten $y = x$	32
3.9.	$\ln(\sqrt{5}x) \mapsto \ln(\sqrt{5}P(x))$	34
3.10.	Die numerische Poincaré–Abbildung zusammen mit $\ln(P(x)) \mapsto \ln(\gamma_1 + ax^b)$	36
3.11.	$\ln r \mapsto \ln P(r)$	37
3.12.	Schwarzschild-Approximationen im x - y -Raum	39
3.13.	Die Lösung $f(r)$ mit $f(1) = 4$ und ihre Schwarzschild-Approximation	40
3.14.	a) Eine Kurve $(\tilde{X}(s), \tilde{Y}(s))$, b) die entsprechende Lösung der Linearisierung, c) die entsprechende numerische Lösung.	44
4.1.	Das effektive Potential für nichtradiale Null-Geodäten	46
4.2.	Effektives Potential für zeitartige Geodäten	47
4.3.	Massenfunktionen	50
A.1.	Variation der freien Parameter im Approximationsverfahren 3. Ordnung	54

Literatur

- [1] HAWKING, S. W.: Particle Creation by Black Holes. In: *Commun. math. Phys.* 49 (1975), S. 199
- [2] HAWKING, S. W.: *Eine kurze Geschichte der Zeit*. Rowohlt Taschenbuch Verlag GmbH, 1991
- [3] ZAIDI, H. ; GEGENBERG, J.: Back reaction of Hawking radiation on black hole geometry. In: *Phys. Rev. D* 57 (1998), Nr. 2
- [4] MASSAR, S. ; PARENTANI, R. *On the Gravitational Back Reaction to Hawking Radiation*. Preprint, gr-qc/9801043. 1998
- [5] HUSSMANN, H.: *Zur Thermodynamik schwarzer Löcher*, www.physik.uni-osnabrueck.de/makrosysteme/examen.htm, Diplomarbeit, 1998
- [6] H. J. SCHMIDT, F. H.: Photonstars. In: *General Relativity and Gravitation* (zur Veröffentlichung angenommen)
- [7] KLEIN, O.: On a case of radiation equilibrium in general relativity theory and its bearing on the early stage of stellar evolution. In: *Arkiv för matematik, Astronomi och Fysik* 34 A (1947), Nr. 19, S. 1–11
- [8] WEINBERG, Steven: *Gravitation and Cosmology*. New York : John Wiley and Sons., Inc., 1972
- [9] MISNER, C. W. ; THORNE, K. S. ; WHEELER, J. A.: *Gravitation*. San Francisco : Freeman and Company, 1973
- [10] CARR, B. J. ; COLEY, A. A. *Self-similarity in General Relativity*. Preprint, gr-qc/9806048. 1998
- [11] CARR, B. J. ; COLEY, A. A. *A Complete Classification of Spherically Symmetric Perfect Fluid Similarity Solutions*. Preprint, gr-qc/9901050. 1999
- [12] WALD, R. M.: *General Relativity*. Chicago : The University of Chicago Press, 1984
- [13] ARNOLD, V. I.: *Mathematische Methoden der klassischen Mechanik*. Basel, Boston, Berlin : Birkhäuser Verlag, 1988
- [14] HAWKING, S. W. ; ELLIS, G. F. R.: *The large scale structure of space-time*. Cambridge University Press, 1973
- [15] ARNOLD, V.I.: *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations*. New York : Springer Verlag, 1983

- [16] EVANS, Charles R. ; COLEMAN, Jason S.: Critical Phenomena and Self-Similarity in the Gravitational Collapse of Radiation Fluid. In: *Phys. Rev. Lett.* 72 (1994), Nr. 12, S. 1782–1785
- [17] LANG, Serge: *Linear Algebra*. Addison-Wesley Publishing, 1971
- [18] SCHUTZ, Bernard F.: *A first course in general relativity*. Cambridge : Cambridge University Press, 1985
- [19] NAKAHARA, M.: *Geometry, Topology and Physics*. Bristol and Philadelphia : Institute of Physics Publishing, 1990
- [20] CHOPTUIK, Matthew W.: Universality and Scaling in Gravitational Collapse of a Massless Scalar Field. In: *Phys. Rev. Lett.* 70 (1993), Nr. 1, S. 9–12
- [21] WALD, R. M. *The Thermodynamics of Black Holes*. Preprint, gr-qc/9912119. 1999
- [22] CARR, B. J. *Spherically Symmetric Self-Similar Solutions and their Astrophysical and Cosmological Applications*. Preprint, gr-qc/0003009. 2000
- [23] CARR, B. J. ; COLEY, A. A. ; GOLIATH, M. ; NILSSON, U. S. ; UGLA, C. *Physical interpretation of self-similar spherically symmetric perfect-fluid models — combining the comoving and homothetic approach*. Preprint, gr-qc/9902070. 1999
- [24] NEUGEBAUER, Gernot: *Relativistische Thermodynamik*. Braunschweig, Wiesbaden : Vieweg, 1981
- [25] KRAMER, D. ; STEPHANI, H. ; HERLT, E.: *Exact Solutions of Einstein's Field Equations*. Cambridge : Cambridge University Press, 1980
- [26] STEPHANI, Hans: *Allgemeine Relativitätstheorie*. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1977
- [27] NILSSON, Ulf S. ; UGGLA, Claes. *General Relativistic Stars: Linear equations of State*. Preprint, gr-qc/0002021. 2000
- [28] NILSSON, Ulf S. ; UGGLA, Claes. *General Relativistic Stars: Polytopic Equations of State*. Preprint, gr-qc/0002022. 2000
- [29] LIE, S.: *Theorie der Transformationsgruppen*. Leipzig : B. G. Teubner, 1988
- [30] ZAITSEV, V. F. ; POLYANIN, A. D.: *Exact Solutions for Ordinary Differential Equations*. Boca Raton : CRC Press, 1995
- [31] MAEDER: *Programming in Mathematica*. Addison-Wesley Publishing, 1990
- [32] WOLFRAM, Stephen: *The Mathematica Book*. Wolfram Media, 1996
- [33] EINSTEIN, Albert: Die Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie. In: *Ann. d. Phys.* 49 (1916), S. 769

Danksagung

Mein besonderer Dank gilt Prof. Dr. Heinz-Jürgen Schmidt, der nicht nur diese Arbeit betreut hat, sondern mir nach einer längeren Pause einen zügigen Wiedereinstieg in die Physik überhaupt erst ermöglicht hat. Ohne sein Verständnis wäre es zu dieser Arbeit gar nicht erst gekommen.

Erklärung

Hiermit erkläre ich, die vorliegende Arbeit selbständig und nur mit den aufgeführten Hilfsmitteln verfaßt zu haben.

Osnabrück, im Mai 2000

—Felix Homann —