

UNIVERSITÄT OSNABRÜCK

BACHELORARBEIT

---

# Verschränkungskriterien

---

Hendrik NIEMEYER

20. April 2009



Verschränkung stellt eine wichtige Resource für z. B. Quantenkryptographie und Quantenteleportation dar. Allerdings erweist sich die Charakterisierung von verschränkten Zuständen als äußerst schwieriges Problem, das bisher nur für den Fall reiner Zustände komplett gelöst ist. Für gemischte Zustände existieren eine Reihe von notwendigen Kriterien, mit denen untersucht werden kann, ob ein Zustand verschränkt ist, von denen einige wichtige hier diskutiert werden sollen. Das PPT-Kriterium soll hierbei den Schwerpunkt bilden, da es für „niedrig dimensionale Systeme“ hinreichend ist und somit Verschränkung in diesen Systemen vollständig beschreibt. Andere Kriterien, die PPT-verschränkte Zustände detektieren können, werden ebenfalls besprochen.



Entanglement is an important resource for e.g. quantum cryptography and quantum teleportation. However, the complete characterization of entangled states is still an unsolved problem: Entanglement of pure states can be fully characterized by the Schmidt decomposition but there is no criterion for mixed states which is necessary and sufficient regardless of certain properties of the system. This thesis' main topic will be the derivation and discussion of the PPT criterion which is necessary and sufficient for "low dimensional" systems. Other criteria which can detect certain PPT entangled states will also be discussed.



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Mathematische Grundlagen</b>	<b>3</b>
2.1	Reine Zustände . . . . .	3
2.2	Gemischte Zustände . . . . .	4
2.3	Produkt-Hilberträume . . . . .	5
2.4	Hilbert-Schmidt-Raum . . . . .	6
2.5	Konvexe Mengen und Kegel . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Separabilität</b>	<b>11</b>
3.1	Definition der Verschränktheit . . . . .	11
3.2	Reine Zustände . . . . .	12
3.3	Gemischte Zustände . . . . .	14
<b>4</b>	<b>PPT-Kriterium</b>	<b>17</b>
4.1	Notwendiges Kriterium . . . . .	17
4.2	Hinreichendes Kriterium . . . . .	18
4.3	Beispiel . . . . .	23
<b>5</b>	<b>Range-Kriterium</b>	<b>25</b>
5.1	Herleitung . . . . .	25
5.2	Beispiel . . . . .	26
<b>6</b>	<b>Reduktionskriterium</b>	<b>31</b>
6.1	Herleitung . . . . .	31
6.2	Beispiel . . . . .	32
<b>7</b>	<b>Verschränkungszeugen</b>	<b>35</b>
7.1	Struktur der Verschränkungszeugen . . . . .	35
7.2	Dualität zu positiven Abbildungen . . . . .	36
<b>8</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>39</b>
<b>A</b>	<b>Zerlegbarkeit von positiven Abbildungen</b>	<b>41</b>
A.1	Allgemeine Betrachtung . . . . .	41
A.2	Der Fall $2 \otimes 2$ . . . . .	45
A.3	Gegenbeispiele . . . . .	47
A.4	Beweis und Klassifizierung von Gegenbeispielen . . . . .	50

**Literaturverzeichnis**

**55**





# 1 Einleitung

Verschränkung wurde erstmals von Einstein, Podolsky und Rosen entdeckt, die nachweisen wollten, dass die Quantenmechanik keine vollständige Beschreibung der physikalischen Realität ermöglicht. ([9]). In ihrem Gedankenexperiment (das sogenannte EPR-Experiment) wird ein Zustand aus zwei Teilsystemen konstruiert, wobei die Teilsysteme durch Eigenfunktion zum Orts- bzw. Impulsoperator beschrieben werden. Die heute weitaus bekanntere Variante des EPR-Experiments beruht auf einer Umformulierung des Szenarios durch Bohm ([2]) auf ein System verschränkter Spinzustände: In seiner Formulierung werden verschiedene Spinrichtungen in einem Gesamtsystem aus zwei Teilsystemen betrachtet. Hierbei hat man ein System aus zwei Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen mit dem Gesamtspin 0. Dieses System zerfällt nun in seine Bestandteile, wobei ein Teilchen nach links zum Experimentator A und das andere nach rechts zum Experimentator B fliegt. Die Wellenfunktion des Gesamtsystems ist in diesem Fall ein Spinsingulett-Zustand mit  $\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$ , der verschränkt ist. Auch in dieser Form diente das EPR-Experiment als Hilfsmittel in der Frage, ob die Quantenmechanik eine vollständige Theorie ist bzw. Theorien mit verborgenen Variablen möglich sind.

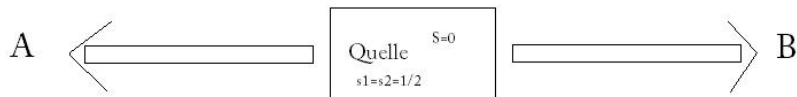


Abbildung 1.1: EPR-Experiment nach Bohm

Bereits 1935 erkannte Schrödinger die Bedeutung der Verschränkung in der Quantenmechanik ([21]): Dadurch, dass es bei einem verschränkten Zustand nicht mehr möglich ist, einem Teilsystem eindeutig einen Teilzustand zuzuordnen, ergibt sich eine Art der Korrelation, die so in der klassischen Mechanik nicht existiert.

Das Ende der rein theoretischen Bedeutung der Verschränkung markieren der

Übergang vom Gedankenexperiment ins Labor in den 1960er und 1970er Jahren ([10, 16]) und die Entwicklung der modernen Quanteninformationstheorie. Für letztere liegt die Bedeutung der verschränkten Zustände hauptsächlich in der Anwendung innerhalb der Quantenkryptographie, Quantenkommunikation und Quantenteleportation.

Im folgenden soll es allerdings nicht um die Anwendung, sondern um grundsätzliche Fragen der Theorie verschränkter Systeme an sich gehen. Die drei wichtigsten Fragen, die man nun stellen kann, sind:

- Wie ist Verschränkung überhaupt definiert?
- Mit welchen Kriterien kann untersucht werden, ob ein Zustand verschränkt ist?
- Lässt sich Verschränkung quantifizieren?

Die ersten beiden Fragen sollen im Rahmen dieser Arbeit für endlichdimensionale Systeme aus zwei Teilhilberträumen untersucht werden, wobei schwerpunktmäßig das PPT-Kriterium von Peres diskutiert wird, da es numerisch sehr einfach zu handhaben ist und für genügend „niedrig dimensionale Systeme“ auch ein hinreichendes Kriterium für Verschränkung darstellt. Hieran wird schon ein großes Problem der Verschränktheitstheorie, das einem wesentlichen Teil ihrer Komplexität ausmacht, deutlich: Fast alle bekannten Verschränkungskriterien sind nur notwendig, sodass sie bestimmte verschränkte Zustände nicht detektieren können. Dies wird am Beispiel des Range-Kriteriums deutlich werden, das in der Lage ist, einige verschränkte Zustände, die das PPT-Kriterium übersieht, zu finden.

## 2 Mathematische Grundlagen

In diesem Kapitel werden kurz die mathematischen und physikalischen Grundlagen für die Beschreibung verschränkter Systeme dargestellt anhand von [1, 22]. Dazu gehört die Unterscheidung von reinen und gemischten Zuständen, sowie die Definition und die Eigenschaften des Dichteoperators. Im Folgenden sollen die betrachteten Hilberträume immer endlichdimensional und die betrachteten Wellenfunktionen normiert sein.

### 2.1 Reine Zustände

Ein Ensemble von Systemen, in dem sich jedes System in einem normierten Zustand  $|\psi\rangle$  befindet, bezeichnet man als reine Gesamtheit oder reinen Zustand. Ein solcher reiner Zustand kann durch einen Projektor bzw. Dichteoperator  $\rho$  beschrieben werden, der wie folgt definiert ist:

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| \quad (2.1)$$

Mit Hilfe der Spur lassen sich einige wichtige Eigenschaften des Dichteoperators für reine Zustände finden.

**Satz 2.1.1.** *Sei  $\rho$  der Projektor auf einen reinen Zustand, dann gelten folgende Eigenschaften:*

1. Sei  $A$  eine Observable, dann ist  $\langle A \rangle \equiv \langle \psi|A|\psi \rangle = \text{Tr}(\rho A)$
2.  $\text{Tr}\rho = 1$
3.  $\rho^2 = \rho$
4.  $\rho^\dagger = \rho$

*Beweis.* 1.  $\text{Tr}(\rho A) = \sum_n \langle n|\psi \rangle \langle \psi|A|n \rangle = \sum_n \langle \psi|A|n \rangle \langle n|\psi \rangle = \langle \psi|A|\psi \rangle$

2.  $\text{Tr}\rho = \text{Tr}(\rho 1) = \langle \psi|1|\psi \rangle = 1$

3.  $\rho^2 = |\psi\rangle\langle\psi|\psi\rangle\langle\psi| = |\psi\rangle\langle\psi|$

4. Die Hermitizität folgt daraus, dass  $\rho$  positiv ist:  $\langle \phi|\rho|\phi \rangle = |\langle \phi|\psi \rangle|^2 \geq 0$ , denn wenn ein Operator hermitesch ist, sind seine Erwartungswerte bezüglich beliebiger Wellenfunktionen stets reell und umgekehrt.

□

## 2.2 Gemischte Zustände

Liegt ein Ensemble vor, das nicht aus einer großen Anzahl von Systemen im gleichen Zustand besteht, sondern in dem auch die Zustände statistisch verteilt sind, so spricht man von einer gemischten Gesamtheit oder einem gemischten Zustand. Seien  $|\psi_i\rangle$  die vorliegenden Zustände, die jeweils mit einer relativen Häufigkeit  $p_i$  ( $\sum_i p_i = 1$ ) vorliegen, so kann man auch für diesen Fall einen hermiteschen Dichteoperator definieren.

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \quad (2.2)$$

Der Dichteoperator eines gemischten Zustands hat ähnliche Eigenschaften wie der eines reinen Zustands, wie im folgenden gezeigt werden soll.

**Satz 2.2.1.** *Seien  $\rho$  und  $\rho_l$  Dichteoperatoren, wobei die  $\rho_l$  paarweise verschieden sein sollen, und  $r_l$  positive Zahlen mit  $\sum_{l=1}^k r_l = 1$  für  $k > 1$ , dann ist die konvexe Summe*

$$\sum_{l=1}^k r_l \rho_l$$

*wieder ein Dichteoperator. Falls  $\rho$  der Projektor eines reinen Zustands ist, lässt sich eine solche Zerlegung niemals finden. Dies bedeutet, die Extrempunkte der konvexen Menge der Dichteoperatoren sind genau die eindimensionalen Projektoren.*

*Beweis.* Sei  $\rho = |\psi\rangle \langle \psi|$  der betrachtete Zustand und ein möglicher Zerlegungsversuch  $\rho = \lambda \rho_1 + (1 - \lambda) \rho_2$  mit  $0 < \lambda < 1$ . Man nehme nun einen Vektor  $|\chi\rangle$ , der zu  $|\psi\rangle$  orthogonal ist, und bilde folgendes Skalarprodukt:

$$\langle \chi | \rho | \chi \rangle = 0 = \lambda \langle \chi | \rho_1 | \chi \rangle + (1 - \lambda) \langle \chi | \rho_2 | \chi \rangle$$

Da man weiß, dass  $\rho_1$  und  $\rho_2$  positive Operatoren sind und die Vorfaktoren vor den Skalarprodukten ebenfalls positiv sind, folgt daraus:

$$\langle \chi | \rho_1 | \chi \rangle = \langle \chi | \rho_2 | \chi \rangle = 0 \quad (2.3)$$

Nun kann man  $|\psi\rangle$  durch Hinzunahme anderer Vektoren zu einer Orthonormalbasis ergänzen und die Matrixdarstellungen von  $\rho_1$  und  $\rho_2$  bestimmen. Für diese Vektoren gilt ebenfalls (2.3). Da weiterhin die Spuren der beiden Matrizen eins sein müssen, findet man als einzige, nicht verschwindende Matrixelemente:

$$\langle \psi | \rho_1 | \psi \rangle = \langle \psi | \rho_2 | \psi \rangle = 1$$

Daher gilt  $\rho_1 = \rho_2 = \rho$  und die Zerlegung ist nicht möglich. □

**Satz 2.2.2.** Sei  $\rho$  der Dichteoperator eines gemischten Zustands, dann gelten folgende Eigenschaften:

1. Sei  $A$  eine Observable, dann ist  $\langle A \rangle \equiv \sum_i p_i \langle \psi_i | A | \psi_i \rangle = \text{Tr}(\rho A)$
2.  $\text{Tr} \rho = 1$
3.  $\rho^2 \neq \rho$  falls ein Gemisch aus mindestens zwei Zuständen vorliegt
4.  $\rho^\dagger = \rho$

*Beweis.* 1.  $\text{Tr}(\rho A) = \sum_{i,n} p_i \langle n | \psi_i \rangle \langle \psi_i | A | n \rangle = \sum_{i,n} p_i \langle \psi_i | A | n \rangle \langle n | \psi_i \rangle = \sum_i p_i \langle \psi_i | A | \psi_i \rangle$

2.  $\text{Tr} \rho = \text{Tr}(\rho 1) = \langle \psi | 1 | \psi \rangle = 1$

3.  $\rho^\dagger = \rho$  und  $\rho^2 = \rho \Leftrightarrow \rho$  ist ein Projektor. Nach Satz 2.2.1 ist eine echte Mischung aus zwei verschiedenen Projektoren kein Projektor. Es gilt allerdings  $\rho^\dagger = \rho$ , woraus  $\rho^2 \neq \rho$  folgt.

4.  $\langle \phi | \rho | \phi \rangle = \sum_i p_i |\langle \phi | \psi_i \rangle|^2 \geq 1$

□

Die beiden Sätze über reine und gemischte Zustände liefern daher ein Kriterium, mit dem über die Spur zwischen reinen und gemischten Zuständen unterschieden werden kann:  $\text{Tr} \rho^2 = 1$  falls  $\rho$  ein reiner Zustand ist, ist offensichtlich richtig. Wenn  $\rho$  aber ein gemischter Zustand ist und aus mindestens zwei Teilzuständen besteht, dann ist  $\text{Tr} \rho^2 < 1$ . Denn  $\rho$  lässt sich mit  $P_m \geq 0$  spektral zerlegen zu  $\rho = \sum_m P_m |m\rangle \langle m|$ . Damit ergibt sich  $\rho^2 = \sum_m P_m^2 |m\rangle \langle m|$ . Damit kann man nun leicht die Spur berechnen zu  $\text{Tr} \rho^2 = \sum_m P_m^2 < 1$ .

### 2.3 Produkt-Hilberträume

Verschränkung ist ein Phänomen, bei dem der Zustand eines Systems aus zwei Teilsystemen nicht durch die Zustände der einzelnen Teilsysteme beschrieben werden kann, obwohl ein reiner Zustand vorliegt. Solche Zustände befinden sich in einem Produkt-Hilbertraum  $\mathcal{H}_{AB} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$  mit  $\dim \mathcal{H}_A = n$  und  $\dim \mathcal{H}_B = m$ . Die Berechnung von Skalarprodukten und Spuren erfolgt in zusammengesetzten Systemen raumweise.

**Definition 2.3.1.** Die *Spur* eines zusammensetzten Systems ist definiert als  $\text{Tr} Z = \sum_{i,n} \langle n, i | Z | n, i \rangle$ , wobei  $|n\rangle$  eine Basis im Teilsystem A und  $|i\rangle$  eine Basis im Teilsystem B ist. Die *Teilspur* über eines einzelnes Teilsystem ist definiert als  $\text{Tr}_A Z = \sum_n \langle n | Z | n \rangle$  für das Teilsystem A. Für das andere Teilsystem wird die Teilspur analog gebildet.

Es sind natürlich auch Zustände denkbar, die aus einem Produkthilbertraum mit noch mehr Teilsystemen stammen, aber solche werden hier nicht betrachtet. In einem solchen zusammengesetzten System gibt es natürlich auch lokale Observablen, die nur auf ein Teilsystem wirken. Ein Beispiel für eine nur auf das Teilsystem A wirkende Observable ist:

$$S^A = S \otimes \mathbb{1}$$

Die Berechnung des Mittelwerts einer solchen Observable lässt sich mit reduzierten Dichteoperatoren besonders einfach schreiben:

$$\langle S^A \rangle = \text{Tr} \rho S^A = \text{Tr}_A \text{Tr}_B \rho S^A = \text{Tr}_A (\text{Tr}_B \rho) S^A = \text{Tr}_A \rho^A S^A$$

Der obigen Gleichung entnimmt man die Definition der reduzierten Dichteoperatoren, die bei der Separabilität als Kriterium der Verschränktheit noch sehr wichtig sein werden:

$$\rho^A = \text{Tr}_B \rho \tag{2.4}$$

$$\rho^B = \text{Tr}_A \rho \tag{2.5}$$

## 2.4 Hilbert-Schmidt-Raum

Die Menge der linearen Operatoren auf einem Hilbertraum  $\mathcal{A}_H = \{A|A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \text{ linear}\}$  bildet einen Vektorraum über dem Körper der komplexen Zahlen. Der Nachweis der Vektorraumaxiome ist einfach und wird deswegen hier weggelassen. Auf diesem Vektorraum kann man ein Skalarprodukt  $\langle A|B \rangle$  definieren und erhält so einen Hilbertraum, der im Allgemeinen als Hilbert-Schmidt-Raum bezeichnet wird. Das Standardskalarprodukt auf diesem Raum ist mit Hilfe der Spur definiert:

$$\langle A|B \rangle = \text{Tr}(A^\dagger B) \tag{2.6}$$

Da die Spur eine lineare Abbildung ist, erfüllt (2.6) auf jeden Fall die Anforderung an ein Skalarprodukt über einem komplexen Vektorraum, sesquilinear zu sein. Denn es gilt mit  $\lambda \in \mathbb{C}$  und  $|n\rangle$  einer Orthonormalbasis von  $\mathcal{H}$ :

$$\langle A + B|C \rangle = \text{Tr}(A^\dagger C) + \text{Tr}(B^\dagger C) = \langle A|C \rangle + \langle B|C \rangle$$

$$\langle C|A + B \rangle = \text{Tr}(C^\dagger A) + \text{Tr}(C^\dagger B) = \langle C|A \rangle + \langle C|B \rangle$$

$$\langle \lambda A|B \rangle = \bar{\lambda} \text{Tr}(A^\dagger B) = \bar{\lambda} \langle A|B \rangle$$

Weiterhin muss ein Skalarprodukt hermitesch sein:

$$\begin{aligned} \overline{\langle A|B \rangle} &= \overline{\text{Tr}(A^\dagger B)} = \sum_n \overline{\langle n|A^\dagger B|n \rangle} \\ &= \sum_n \overline{\langle An|Bn \rangle} = \sum_n \langle Bn|An \rangle = \text{Tr}(B^\dagger A) \\ &= \langle B|A \rangle \end{aligned}$$

Die letzte Eigenschaft, die ein Skalarprodukt erfüllen muss, ist positiv definit zu sein. Dies ist aber offensichtlich erfüllt. Damit handelt es sich bei (2.6) um ein Skalarprodukt.

Auf dem hier diskutierten Hilbert-Schmidt-Raum lassen sich auch „Operatoren“ definieren, die Elemente des Raumes aufeinander abbilden. Diese werden üblicherweise mit  $\Lambda$  bezeichnet und der aus ihnen bestehende Raum mit  $\mathcal{L}(\mathcal{A}_H, \mathcal{A}_H)$ , wenn  $\Lambda$  wieder in den gleichen Hilbert-Schmidt-Raum abbildet. Die  $\Lambda$  bezeichnet man als „Superoperatoren“ oder einfach nur Abbildungen.

## 2.5 Konvexe Mengen und Kegel

Zur Untersuchung der Struktur verschränkter Zustände eignet sich der Begriff des konvexen Kegels aus der Linearen Algebra.

**Definition 2.5.1.** Sei  $M \subseteq V$  Teilmenge eines reellen Vektorraums, dann heißt diese *konvex*, wenn für alle  $x, y \in M$  und  $\lambda \in [0, 1]$  die Beziehung  $\lambda x + (1 - \lambda)y \in M$  gilt.

Diese Definition lässt sich durch Induktion auch leicht auf mehr als zwei Summanden verallgemeinern.

**Definition 2.5.2.** Sei  $M \subseteq V$  eine konvexe Menge und  $x \in M$ .  $x$  heißt *Extremalpunkt* von  $M$ , wenn  $x$  sich nicht als echte Konvexkombination aus Elementen von  $M$  darstellen lässt. Das heißt für  $y_1, y_2 \in M$  und  $\lambda \in [0, 1]$ , gilt:

$$x = \lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2 \Leftrightarrow y_1 = y_2 = x$$

Nun betrachten wir die Menge der Zustände  $V = \{\rho \in M_d\}$  eines gemischten Systems. Diese Menge ist konvex, denn es gilt mit  $\lambda \in [0, 1]$  und  $\rho_1, \rho_2 \in V$ :

$$\lambda \rho_1 + (1 - \lambda) \rho_2 = \lambda \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| + (1 - \lambda) \sum_j q_j |\phi_j\rangle\langle\phi_j|$$

Für die Koeffizienten gilt dann:

$$\lambda \underbrace{\sum_i p_i}_{=1} + (1 - \lambda) \underbrace{\sum_j q_j}_{=1} = 1 + (1 - \lambda) = 1$$

Somit handelt es sich bei der Konvexkombination auch wieder um einen Zustand und  $V$  ist konvex. Die Extremalpunkte von  $V$  sind offensichtlich die reinen Zustände.

**Definition 2.5.3.** Eine Menge  $K \subseteq V$  heißt *Kegel*, wenn für alle  $x \in K$  und alle  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  auch  $\alpha \cdot x \in K$



Auch im Dualraum lassen sich Kegel definieren.

**Lemma 2.5.1.** *Sei  $V^*$  der Dualraum zu  $V$ . Die Menge  $K^* \subset V^*$  mit  $K^* = \{\phi \in V^* \mid \phi(v) \geq 0 \forall v \in V\}$  ist dann ebenfalls ein Kegel.*

*Beweis.* Wenn  $\phi(v) \geq 0$ , dann ist auch  $\alpha \cdot \phi(v) \geq 0$  für alle  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  □

**Satz 2.5.2.** *1. Sei  $K^* \subseteq V^*$  ein Kegel des Dualraums von  $V$ . Identifiziert man den Dualraum mit dem Vektorraum, so kann den dualen Kegel auch auffassen als  $K^* = \{x \in V \mid \forall y \in K : \langle x \mid y \rangle \geq 0\}$ .*

*2. Zwei Kegel  $K, C$  heißen dual zueinander, wenn  $K = C^*$  und  $C = K^*$  gilt*

*Beweis.* Im Dualraum  $V^*$  existiert eine Basis  $\{\phi_i\}$  mit der Eigenschaft  $\phi_i(e_j) = \delta_{ij}$ , wenn  $\{e_j\}$  eine Basis in  $V$  ist. Da zu  $V$  ein Skalarprodukt erklärt ist, kann der Basis  $\{\phi_i\}$  eindeutig eine Basis  $\{f_i\}$  in  $V$  zugeordnet werden, sodass die Eigenschaft der dualen Basis übersetzt ins Skalarprodukt immer noch gültig ist:  $\langle f_i \mid e_j \rangle = \delta_{ij}$ . Damit ist also jede Dualform darstellbar durch Vektoren aus  $V$ . □

**Lemma 2.5.3.** *Sei  $K \subseteq V$  ein Kegel und  $K^*$  der zu  $K$  duale Kegel. Dann ist  $K^*$  konvex.*

*Beweis.* Seien  $x_1, x_2 \in V$  mit  $\forall y \in K : \langle x_1 \mid y \rangle \geq 0$  und  $\langle x_2 \mid y \rangle \geq 0$ . Sei  $x_3 = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$  mit  $\lambda \in [0; 1]$ . Dann ist

$$\langle x_3 \mid y \rangle = \lambda \langle x_1 \mid y \rangle + (1 - \lambda) \langle x_2 \mid y \rangle \geq 0$$

Daraus folgt  $x_3 \in K^*$ , sodass  $K^*$  konvex ist. □

Die Menge der Zustände bildet einen konvexen Kegel. Dies wird im Kapitel über Verschränkungszeugen wieder aufgegriffen.

**Definition 2.5.4.** Seien  $M, N \in V$  nicht leer. Dann ist die *direkte Summe*  $M+N = \{z \in V \mid \exists x \in M, \exists y \in N : z = x + y\}$

Konvexität bleibt bei der Bildung der direkten Summe und des Durchschnitts erhalten.

**Lemma 2.5.4.** *Seien  $M, N \in V$  konvex. Dann sind auch  $M + N$  und  $M \cap N$  konvex.*

*Beweis.* Für den Durchschnitt ist die Behauptung offensichtlich richtig. Seien  $z_1, z_2 \in M + N$  und  $\lambda \in [0, 1]$ , dann ist  $z_3 = \lambda z_1 + (1 - \lambda) z_2 = \lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2 + \lambda y_1 + (1 - \lambda) y_2$  mit  $x_1 + y_1 = z_1$  und  $x_2 + y_2 = z_2$  wie in Definition 2.5.4. Es gilt nun  $\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2 = x_3 \in M$  und  $\lambda y_1 + (1 - \lambda) y_2 = y_3 \in N$ . Daraus folgt sofort  $x_3 + y_3 = z_3 \in M + N$  und somit ist  $M + N$  konvex. □

Die nächste wichtige Frage, die sich stellt, ist, was mit direkten Summen und Durchschnitts von Kegeln beim Übergang zum dualen Kegel geschieht.

**Definition 2.5.5.** Sei  $A$  eine Menge, dann ist  $\overline{A}$ , der *Abschluss* von  $A$ , die kleinste abgeschlossene Menge, die  $A$  enthält.

**Lemma 2.5.5.** Sei  $K$  ein konvexer Kegel, dann gilt  $(K^*)^* = \overline{K}$

*Beweis.* Die Behauptung,  $K \subseteq (K^*)^*$  ist offensichtlich erfüllt, sodass auch  $\overline{K} \subseteq (K^*)^*$  gilt. Sei nun die Umkehrung  $(K^*)^* \subseteq \overline{K}$  falsch, dann gibt es ein  $z \in (K^*)^* \setminus \overline{K}$  und es existiert nach dem Trennungssatz für konvexe Kegel<sup>1</sup> ein Vektor  $c$  mit den Eigenschaften:

$$\langle c|z \rangle < 0 \quad (2.7)$$

$$\forall x \in \overline{K} : \langle c|x \rangle \geq 0 \quad (2.8)$$

Die Gleichung (2.8) besagt, dass  $c \in K^*$  gilt, was allerdings (2.7) widerspricht, da  $z \in (K^*)^* \setminus \overline{K}$  in diesem Fall bedeutet, dass  $\langle c|z \rangle \geq 0$  sein müsste.  $\square$

**Satz 2.5.6.** Seien  $K, C$  abgeschlossene, konvexe Kegel, dann gilt:

1. Wenn  $K \subset C$ , dann gilt  $K^* \supset C^*$
2.  $(K + C)^* = K^* \cap C^*$
3.  $(K \cap C)^* = K^* + C^*$

*Beweis.* Für die erste Eigenschaft wähle man  $x \in C^*$  beliebig. Dann gilt  $\forall z \in C : \langle x|z \rangle \geq 0$ . Da  $K \subset C$  ist, gilt das insbesondere natürlich auch für die  $z$ , die in  $K$  liegen. Somit gilt dann  $x \in K^*$  und daraus folgt die Behauptung.

Die zweite Eigenschaft lässt sich wie folgt zeigen: Sei  $x \in K^* \cap C^*$ , dann gilt für alle  $y = y_1 + y_2$  mit  $y_1 \in K$  und  $y_2 \in C$ :  $\langle x|y \rangle = \langle x|y_1 \rangle + \langle x|y_2 \rangle \geq 0$ . Daher ist  $K^* \cap C^* \subset (K + C)^*$ . Andererseits ist aber  $K \subset K + C$  und  $C \subset K + C$ , sodass  $K^* \supset (K + C)^*$  und  $C^* \supset (K + C)^*$  gilt. Daher gilt auch  $K^* \cap C^* \supset (K + C)^*$ . Die doppelte, gegenseitige Inklusion bedeutet dann  $(K + C)^* = K^* \cap C^*$ .

Zum Beweis der dritten Eigenschaft kann man nun die zweite Eigenschaft ausnutzen: Für abgeschlossene, konvexe Kegel gilt die Beziehung

$$K \cap C = (K^*)^* \cap (C^*)^* = (K^* + C^*)^* \quad (2.9)$$

Betrachtet man nun  $(K \cap C)^*$  und setzt (2.9) ein, so erhält man:

$$(K \cap C)^* = (K^* + C^*)^{**} = \overline{K^* + C^*} = K^* + C^*$$

$\square$

---

<sup>1</sup>Siehe hierzu [7]



### 3 Separabilität und Verschränkung

In diesem Kapitel soll zunächst eine Definition von Verschränktheit nach [1] gegeben werden und ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für die Verschränktheit reiner Zustände angegeben werden.

#### 3.1 Definition der Verschränktheit

Verschränkte Zustände zeichnen sich durch eine Korrelation der Messwerte beider Teilsysteme für eine Observable aus. So kann z.B. für den Zustand

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (|0, 1\rangle + |1, 0\rangle)$$

nur die Messwertkombination  $(0, 1)$  oder  $(1, 0)$  bezüglich der Messung der Basiszustände auftreten. Das heißt, dass durch Messung an einem Teilsystem mit Sicherheit das Messergebnis an dem anderen Teilsystem vorhergesagt werden kann. Der Korrelationsbegriff lässt sich nun mit Hilfe der Dichteoperatoren wie folgt definieren.

**Definition 3.1.1** (Korrelierte Zustände). Sei  $\rho$  der Zustand eines zusammengesetzten Systems. Ist dieser Zustand kein Produktzustand, gilt also  $\rho \neq \rho^A \otimes \rho^B$ , so nennt man diesen Zustand *korreliert*.

Messungen an den Teilsystemen von unkorrelierten Systemen liefern stets unabhängige Messwerte. Daher kann eine äquivalente Definition über Messungen gefunden werden. Korrelierte Systeme lassen sich nun aber wieder in zwei verschiedene Unterkategorien aufteilen: Es gibt einerseits die klassisch korrelierten Zustände und die nichtklassisch korrelierten Zustände. Letztere werden wir als verschränkte Zustände bezeichnen. Klassisch korrelierte Zustände lassen sich über LOCC („local operations using classical communication“) klassifizieren: Alice<sup>1</sup> präpariert ihr System im Zustand  $\rho_r^A$  und teilt das Ergebnis ihres Präparationsexperiments Bob über klassische Kommunikation mit. Die zweite Partei präpariert nun ebenfalls ihr System im Zustand  $\rho_r^B$ . Wiederholt man einen solchen Vorgang für verschiedene  $r$  mit den relativen Häufigkeiten  $p_r$ , so erhält man einen gemischten Zustand der Form:

$$\rho = \sum_{r=1}^m p_r \rho_r^A \otimes \rho_r^B \tag{3.1}$$

---

<sup>1</sup>Im folgenden wird die in der Literatur übliche Namenskonvention verwendet: Der Experimentator am System A ist Alice, während Bob am System B experimentiert

Ein so präparierter Zustand enthält nur Korrelationen, die sich klassisch erzeugen lassen. Löst man sich vom speziellen Präparationsverfahren, erhält man eine Definition für klassisch korrelierte Zustände.

**Definition 3.1.2** (Klassisch korrelierte Zustände). Ein Zustand  $\rho$  der Form (3.1) heißt für  $m \neq 1$  *klassisch korreliert*.

Jetzt lassen sich die verschränkten Zustände definieren.

**Definition 3.1.3.** Sei  $\rho$  der Zustand eines zusammengesetzten Systems. Ist dieser Zustand nicht korreliert oder klassisch korreliert, so bezeichnet man ihn als *separabel*, sonst bezeichnet man ihn als *verschränkt*.

Aus dieser Definition folgt, dass sich separable Zustände immer in Form (3.1) schreiben lassen. Daher ist das Problem bei der Bestimmung, ob ein Zustand verschränkt ist oder nicht, die Suche nach einer solchen Zerlegung.

## 3.2 Reine Zustände

Für reine Zustände lässt sich ein sowohl notwendiges als auch hinreichendes Kriterium für Verschränktheit angeben. Falls für den Zustand des Systems  $|\psi\rangle \neq |\phi^A\rangle \otimes |\chi^B\rangle$  gilt, so muss es sich um einen verschränkten Zustand handeln, denn es kann sich zunächst keinesfalls um einen nicht korrelierten Zustand handeln. Um zu zeigen, dass es sich ebenfalls nicht um einen klassisch korrelierten Zustand handeln kann, braucht man noch das Ergebnis von Satz 2.2.1. Da ein reiner Zustand nicht zerlegt werden kann, ist ein Zustand, der kein Produktzustand ist, auch nicht klassisch korreliert. Daher muss er verschränkt sein. Das einzige, jetzt noch zu lösende Problem für reine Zustände, besteht aus der Frage, ob ein reiner Zustand  $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$  ein Produktzustand ist. Dies wird durch die Schmidtzerlegung gelöst.

**Satz 3.2.1.** Sei  $\rho$  ein reiner Zustand eines zusammengesetzten Systems aus zwei Teilsystemen und  $\rho_A, \rho_B$  die reduzierten Dichteoperatoren.

1. Der Vektor  $|\psi\rangle$  kann mit  $p_n > 0$  wie folgt als Schmidtzerlegung dargestellt werden:

$$|\psi\rangle = \sum_{n=1}^k \sqrt{p_n} |u_n^A, w_n^B\rangle \quad (3.2)$$

Hierbei sind  $|u_n^A\rangle$  und  $|w_n^B\rangle$  Eigenbasen der reduzierten Dichteoperatoren. Für paarweise verschiedene  $p_n$  sind diese Vektoren bis auf eine Phase eindeutig bestimmt.

2.  $\rho_A$  und  $\rho_B$  haben dieselben nicht verschwindenden positiven Eigenwerte  $p_1, \dots, p_k$  mit  $k \leq \min(\dim \mathcal{H}^A, \dim \mathcal{H}^B)$ .
3. Die Zahl  $k$  heißt *Schmidtrang* von  $|\psi\rangle$ .

*Beweis.* Zunächst schreibt man  $|\psi\rangle$  in einer Basis des Produkthilbertraums auf:

$$|\psi\rangle = \sum_{l,i=1}^{a,b} a_{li} |c_l^A, d_i^B\rangle = \sum_{l=1}^a |c_l^A, \tilde{w}_l^B\rangle \quad (3.3)$$

Die hierbei eingeführten relativen Zustände  $|\tilde{w}_l^B\rangle$  sind im allgemeinen weder orthogonal noch normiert. Wählt man nun als Orthonormalbasis von  $\mathcal{H}^A$  die orthonormalen Eigenvektoren  $|u_n^A\rangle$  von  $\rho_A$ , also eine Eigenbasis von  $\rho^A$  ( $\rho^A = \sum_{i=1}^a p_n |u_i^A\rangle\langle u_i^A|$ )

mit  $0 \leq p_n \leq 1$  und  $\sum_{n=1}^a p_n = 1$ , so erhält man, unter der Annahme dass  $p_n = 0$  für  $k+1 \leq n \leq a$ :

$$\begin{aligned} \rho^A &= Tr_B(|\psi\rangle\langle\psi|) \\ &= Tr_B\left(\sum_{l,n=1}^a |u_l^A\rangle\langle u_n^A| \otimes |\tilde{w}_l^B\rangle\langle\tilde{w}_n^B|\right) \\ &= \sum_{l,n=1}^a |u_l^A\rangle\langle u_n^A| Tr_B(|\tilde{w}_l^B\rangle\langle\tilde{w}_n^B|) \\ &= \sum_{l,n=1}^a \langle\tilde{w}_n^B|\tilde{w}_l^B\rangle |u_l^A\rangle\langle u_n^A| \end{aligned}$$

Der Vergleich mit der Spektralzerlegung von  $\rho_A$  führt auf:

$$\langle\tilde{w}_n^B|\tilde{w}_l^B\rangle = p_n \delta_{nl}$$

Für  $n \geq k+1$  sind die  $|\tilde{w}_l^B\rangle$  Nullvektoren und damit ist die Orthogonalität und die erste Behauptung bewiesen, denn wenn wir nun den Operator  $\rho_B$  ausrechnen und die Definition der relativen Zustände  $|\tilde{w}_n^B\rangle = \sqrt{p_n} |w_n^B\rangle$  einsetzen in (3.3) folgt sofort die Darstellung (3.2). Für die zweite Behauptung findet man:

$$\begin{aligned} \rho_B &= Tr_A\left(\sum_{l,n=1}^a |u_l^A\rangle\langle u_n^A| \otimes |\tilde{w}_l^B\rangle\langle\tilde{w}_n^B|\right) \\ &= \sum_{l,n=1}^a \delta_{nl} |\tilde{w}_l^B\rangle\langle\tilde{w}_n^B| \\ &= \sum_l^a |\tilde{w}_l^B\rangle\langle\tilde{w}_l^B| \\ &= \sum_l^a p_l |w_l^B\rangle\langle w_l^B| \end{aligned}$$

Daher sind also die Eigenwerte von  $\rho_A$  und  $\rho_B$  gleich.  $\square$

Somit kann nun sofort festgestellt werden, ob ein reiner Zustand verschränkt ist oder nicht.

**Satz 3.2.2.** *Sei  $\rho$  ein reiner Zustand. Dieser ist genau dann separabel, wenn sein Schmidttrank  $k = 1$  ist. Dies ist äquivalent zu der Aussage, dass die reduzierten Dichteoperatoren  $\rho^A$  und  $\rho^B$  den den Rang 1 haben.*

Als Beispiel kann man den Zustand

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle + |10\rangle)$$

betrachten. Dieser ist ein bekanntes Beispiel für einen verschränkten Zustand und eignet sich daher gut als Test des letzten Satzes.

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| = \frac{1}{2} (|01\rangle\langle 01| + |01\rangle\langle 10| + |10\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 10|)$$

Damit findet man:

$$Tr_{A\rho} = \frac{1}{2} (|1\rangle\langle 1| + |0\rangle\langle 0|)$$

$Tr_{A\rho}$  ist ein Operator auf dem Teilsystem B mit der Matrixdarstellung:

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Diese Matrix hat offensichtlich den Rang 2, sodass es sich um einen verschränkten Zustand handelt.

### 3.3 Gemischte Zustände

Für gemischte Zustände ist die Angabe eines Kriteriums für die Verschränktheit wesentlich schwieriger. Denn der gegebene Dichteoperator  $\rho^{AB}$  dieses Systems besitzt unendlich viele Ensemblezerlegungen, wie im folgenden gezeigt werden soll. Daher ist die Überprüfung der Verschränktheit mit unendlich großem Aufwand verbunden: Sind für eine mögliche Zerlegung  $\rho = \sum_a |\psi_a\rangle\langle\psi_a|$  des Zustands alle  $|\psi_a\rangle$  Produktzustände gemäß Satz 3.2.2, so handelt es sich um einen separablen Zustand. Trifft dies nicht zu, muss eine weitere Zerlegung untersucht werden. Dieser „Algorithmus“ ist also öffentlich nicht zum Auffinden verschränkter Zustände geeignet.

**Satz 3.3.1.** *Sei  $\rho$  der Dichteoperator eines gemischten Zustands, dann existieren unendlich viele Ensemblezerlegungen derart, dass  $\rho = \sum_a p_a |\psi_a\rangle\langle\psi_a|$ .*

Dieser Satz kann für zwei-dimensionale Teilsysteme anhand der Blochkugel plausibel gemacht werden: Sei  $\rho$  ein beliebiger Dichteoperator für ein System aus zwei zwei-dimensionalen Teilsystemen, dann hat dieser immer eine Darstellung  $\rho = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \vec{w} \cdot \vec{\sigma})$ , wobei  $\vec{w} \cdot \vec{\sigma} = \sum_{i=1}^3 w_i \sigma_i$  mit den Pauli-Matrizen  $\sigma_i$  die Bedeutung dieses Skalarprodukts ist. Diese Darstellung ist gleichbeutend mit:

$$\rho = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + w_3 & w_1 - iw_2 \\ w_1 + iw_2 & 1 - w_3 \end{pmatrix}$$

Bis auf  $\rho \geq 0$  sind die allgemeinen Bedingungen der Sätze 2.1.1 und 2.2.2 bereits erfüllt. Für die Positivität muss nun  $\rho_{11} \geq 0$  und  $\det \rho \geq 0$  gelten. Dies ist aber äquivalent zu  $1 - (w_1^2 + w_2^2 + w_3^2) = 1 - |\vec{w}|^2 \geq 0$ . Daraus folgt dann:

$$|\vec{w}| \leq 1 \tag{3.4}$$

Daher bildet die Menge aller Zustände eine Kugel mit dem Radius eins. Wählt man nun  $|\vec{w}| = 1$ , so gilt  $\rho^2 = \rho$  und es handelt sich um einen reinen Zustand. Das heißt, der Rand der Kugel wird von den reinen Zuständen (eindimensionalen Projektoren) gebildet, während die gemischten Zustände im Inneren der Kugel liegen. Eine Ensemblezerlegung eines gemischten Zustands entspricht dann einer Geraden durch zwei Punkte auf der Oberfläche der Blochkugel und den Punkt, der den gemischten Zustand repräsentiert. Für jeden beliebigen Punkt innerhalb der Blochkugel gibt es unendlich viele solcher Geraden, sodass es auch unendlich viele Zerlegungen gibt. Betrachtet man nun höher dimensionale Teilsysteme eines gemischten Zustands, so gibt es ebenfalls unendliche viele Zerlegungen, da dies bereits für zwei-dimensionale Unterräume des Systems gilt.

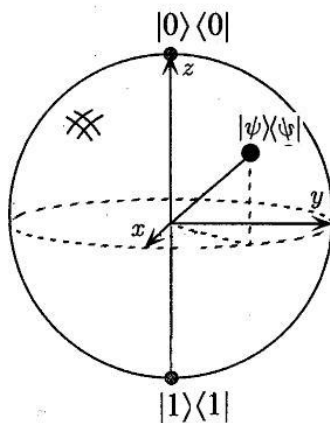


Abbildung 3.1: Die Blochkugel. Auf ihrer Oberfläche liegen die reinen und in ihrem inneren die gemischten Zustände eines zweidimensionalen Systems

Ein Beispiel für die Mehrdeutigkeit der Ensemblezerlegung ist der Zustand  $\rho = \frac{1}{4}1_4$  eines Systems mit zweidimensionalen Teilsystemen. Er lässt sich darstellen als



$\rho = \frac{1}{4} (|00\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11| + |01\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 10|)$ , also als Linearkombination von Produktzuständen. Andererseits ist dieser Zustand mit Hilfe der „Bell-Basis“

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + |11\rangle)$$

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle + |10\rangle)$$

$$|\psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle - |11\rangle)$$

$$|\psi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle - |10\rangle)$$

auch dargestellt werden als  $\rho = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^4 |\psi_n\rangle\langle \psi_n|$ . Die dieser Ensemblezerlegung zugrunde liegenden Vektoren der „Bell-Basis“ sind natürlich keine Produktzustände.

## 4 PPT-Kriterium

In diesem Kapitel soll das PPT-Kriterium („positive partial transpose“) untersucht werden, das für alle gemischten Zustände ein notwendiges Kriterium der Verschränktheit darstellt. Was es aber besonders interessant macht, ist die Tatsache, dass es für Systeme mit „kleinen Dimensionen“ auch ein hinreichendes Kriterium darstellt. Es wurde ursprünglich von Peres entdeckt ([19]) und später wurde seine Bedeutung als hinreichendes Kriterium erkannt ([13, 12])

### 4.1 PPT als notwendiges Kriterium

Wir betrachten in diesem Fall einen gemischten, zusammengesetzten Zustand  $\rho$  und berechnen die Matrixelemente in einer beliebigen Produktbasis:

$$\rho_{m\mu, n\nu} = \langle m, \mu | \rho | n, \nu \rangle$$

Hierbei stehen lateinische Indizes für das erste und griechische Indizes für das zweite Teilsystem. Damit kann man nun die partielle Transposition für das zweite Teilsystem (die partielle Transposition für das erste Teilsystem lässt sich analog konstruieren) definieren:

$$\rho_{m\mu, n\nu}^{TB} = \rho_{m\nu, n\mu} \quad (4.1)$$

Hierbei ist zu beachten, dass es sich bei  $\rho \mapsto \rho^{TB}$  um eine basisabhängige Abbildung handelt. Um die Gültigkeit dieses Kriteriums zeigen zu können, braucht man noch folgendes Lemma.

**Lemma 4.1.1.** *Sei  $A$  die Matrix eines Operators in einer Orthonormalbasis und  $A^T$  die zugehörige transponierte Matrix. Dann gilt  $A \geq 0 \Leftrightarrow A^T \geq 0$*

*Beweis.*  $A \geq 0$  ist gleichbedeutend mit der Tatsache, dass alle Eigenwerte von  $A$  positiv oder null sind. Da  $\det(A - \lambda \mathbf{1}) = \det(A^T - \lambda \mathbf{1})$  gilt, besitzen  $A$  und  $A^T$  das gleiche Spektrum. Daher sind auch alle Eigenwerte von  $A^T$  positiv oder null und somit gilt  $A^T \geq 0$ .  $\square$

Wenn der von uns betrachtete Zustand  $\rho$  separabel ist, sich also in Form (3.1) schreiben lässt, dann folgt:

$$\rho^{TB} = \sum_{r=1}^m p_r \rho_r^A \otimes (\rho_r^B)^T$$

Für  $\rho_r^B \geq 0$  folgt  $(\rho_r^B)^T \geq 0$  wegen Lemma 4.1.1 und damit  $\rho^{TB}$ . Daher gilt folgender Satz:

**Satz 4.1.2.** *Wenn  $\rho$  ein gemischter, separabler Zustand ist, sind die Eigenwerte von  $\rho^{TB}$  bzw.  $\rho^{TA}$  alle nicht negativ.*

Somit ist ein notwendiges Kriterium für die Verschränktheit bereits gefunden. Es ist im allgemeinen nicht hinreichend, weil die Umkehrung des gerade formulierten Satz nicht immer gilt. Rechnerisch lässt sich dieses Kriterium wie folgt handhaben: Ein  $m \otimes n$  Zustand<sup>1</sup> lässt sich in Matrixschreibweise als  $m \times m$  Matrix schreiben, deren Einträge  $A_{ij}$   $n \times n$  Matrizen sind, die nur auf dem zweiten Teilsystem operieren.

$$\rho = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{m1} & \dots & A_{mm} \end{pmatrix}$$

Die Matrixelemente sind nun definiert als  $(A_{ij})_{\mu\nu} = \rho_{i\nu, j\mu}$ . Damit reduziert sich das partielle Transponieren nun auf das Transponieren der Matrizen  $A_{ij}$ :

$$\rho^{TB} = \begin{pmatrix} A_{11}^T & \dots & A_{1m}^T \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{m1}^T & \dots & A_{mm}^T \end{pmatrix}$$

## 4.2 PPT als hinreichendes Kriterium

Im folgenden soll gezeigt werden, dass der im letzten Abschnitt formulierte Satz für  $2 \otimes 2$  und  $2 \otimes 3$  dimensionale Systeme ein hinreichendes Kriterium darstellt. Hierfür werden einige Sätze über komplett positive Abbildungen in Hilbert-Schmidt-Räumen mit dem Standardskalarprodukt  $\langle A|B \rangle = \text{Tr}(A^\dagger B)$  gebraucht.

Seien  $\mathcal{A}_A$  und  $\mathcal{A}_B$  die Räume der Operatoren auf den entsprechenden Hilberträumen der Teilsysteme. Sie bilden jeweils selbst einen Hilbertraum, den sogenannten Hilbert-Schmidt-Raum. Sei  $\mathcal{L}(\mathcal{A}_A, \mathcal{A}_B)$  der Raum der linearen Abbildungen von  $\mathcal{A}_A$  nach  $\mathcal{A}_B$ .

**Definition 4.2.1.** Eine Abbildung  $\Lambda \in \mathcal{L}(\mathcal{A}_A, \mathcal{A}_B)$  heißt *positiv*, wenn aus  $A \geq 0$   $\Lambda(A) \geq 0$  folgt

Zusätzlich benötigen wir den Begriff der vollständig positive Abbildungen.

**Definition 4.2.2.** Eine Abbildung  $\Lambda \in \mathcal{L}(\mathcal{A}_A, \mathcal{A}_B)$  heißt *n-positiv*, falls

$$\Lambda_n = \Lambda \otimes \mathbf{1}_n : \mathcal{A}_A \otimes \mathcal{M}_n \rightarrow \mathcal{A}_B \otimes \mathcal{M}_n$$

<sup>1</sup>Diese Kurzschreibweise bedeutet, dass es sich beim ersten Teilsystem um einen Hilbertraum der Dimension  $m$  und beim zweiten Teilsystem um einen Hilbertraum der Dimension  $n$  handeln soll.

positiv für  $n \in \mathbb{N}$  ist. Ist die Abbildung positiv für alle  $n$ , so nennt man sie *vollständig positiv*. Hierbei ist  $\mathcal{M}_n$  der Raum der quadratischen  $n \times n$  Matrizen.

Das heißt, dass das Tensorprodukt aus einer vollständig positiven Abbildung und der Identität positive Operatoren auf positive Operatoren abbildet. Die generelle Darstellung einer vollständig positiven Abbildung lautet nach [17], wenn  $W_i$  beliebige Operatoren sind:

$$\Lambda(\rho) = \sum_i W_i \rho W_i^\dagger$$

Eine Beispiel für eine nicht vollständig positive Abbildung ist die Transposition: Bildet man das Tensorprodukt aus Identität und Transposition und wendet dies auf einen Operator an, erhält man die partielle Transposition des Operators, die nicht zwangsläufig positiv sein muss.

**Definition 4.2.3.** Eine positive Abbildung  $\Lambda$  heißt *zerlegbar*, wenn folgende Darstellung existiert:

$$\Lambda = \Lambda_{CP}^1 + \Lambda_{CP}^2 \circ T$$

Hierbei sind  $\Lambda_{CP}^i$  vollständig positive Abbildungen und  $T$  der Transpositionsoperator .

Für kleine Dimensionen gibt es folgendes wichtiges Resultat ([23, 4, 27]).

**Satz 4.2.1.** *In einem  $2 \otimes 2$  oder  $2 \otimes 3$  dimensionalen System sind alle positiven Abbildungen zerlegbar*

Für den Beweis und Gegenbeispiele in höheren Dimensionen siehe Anhang A Für höherdimensionale Systeme (d.h. für den Fall  $3 \otimes 3$  oder höher) gibt es auf jeden Fall nicht zerlegbare, positive Operatoren ([23, 4])<sup>2</sup>. Nun kann man versuchen, Verschränkung durch positive Abbildungen zu beschreiben. Sei  $\Lambda$  eine positive Abbildung, sowie  $\rho$  und  $\tilde{\rho}$  Dichteoperatoren, dann gilt  $(\Lambda \otimes \mathbf{1})(\rho \otimes \tilde{\rho}) = (\Lambda\rho) \otimes \tilde{\rho} \geq 0$ . Das heißt, das Tensorprodukt aus einer positiven Abbildung und der Identität bildet separable Zustände auf positive Operatoren ab. Die Frage ist nun, ob es für verschränkte Zustände  $\rho$  Abbildungen  $\Lambda$  gibt, sodass  $(\Lambda \otimes \mathbf{1})\rho$  nicht positiv ist. Das heißt, man muss zunächst in der Menge der positiven Abbildungen nach denen suchen, die sich für eine solche Untersuchung eignen. Zunächst benötigen wir aber noch ein Lemma.

**Lemma 4.2.2.** *Für einen beliebigen verschränkten Zustand  $\rho$  existiert ein hermitescher Operator  $A$  mit  $\text{Tr}(A\rho) < 0$  und  $\text{Tr}(A\sigma) \geq 0$ , wobei  $\sigma$  ein beliebiger separabler Zustand ist.*

<sup>2</sup>Im Anhang A werden einige Beispiele diskutiert.

*Beweis.* Die Menge der separablen Zustände ist konvex und abgeschlossen. Daher kann folgender Satz angewandt werden<sup>3</sup>: Sind  $W_1$  und  $W_2$  konvexe, abgeschlossene, disjunkte Mengen in einem reellen Banachraum und eine von beiden ist kompakt (in dem hier betrachteten Fall, ist das die einelementige Teilmenge, die nur  $\rho$  enthält), dann existiert ein stetiges, lineares Funktional  $f$  und  $\alpha \in \mathbb{R}$ , sodass für alle  $w_1 \in W_1$  und  $w_2 \in W_2$

$$f(w_1) < \alpha \leq f(w_2)$$

Für unseren Fall bedeutet das, dass ein reelles Funktional  $g$  existiert, sodass

$$g(\rho) < \beta \leq g(\sigma)$$

für alle separablen Zustände  $\sigma$ . Auf dem hier betrachteten Hilbertraum kann dieses Funktional als  $g(\rho) = \text{Tr}(\rho B)$  geschrieben werden, wobei  $B$  hermitesch ist. Definiert man nun  $A = B - \beta \mathbf{1}$ , erhält man genau die Aussage des Satzes.  $\square$

Mit diesem Lemma kann nun folgender Satz bewiesen werden.

**Satz 4.2.3.** *Ein Zustand  $\rho$  ist genau dann separabel, wenn für jeden beliebigen hermiteschen Operator  $A$ , der  $\text{Tr}(A(P \otimes Q)) \geq 0$  für alle reinen Zustände  $P$  und  $Q$  auf den Teilsystemen erfüllt, gilt:*

$$\text{Tr}(A\rho) \geq 0 \tag{4.2}$$

*Beweis.* Wenn  $\rho$  separabel ist, dann gilt der Satz offensichtlich. Für die Umkehrung nimmt man nun an, dass  $\rho$  verschränkt ist und trotzdem die Bedingung des Satzes erfüllt. Nach der Aussage des Lemmas wäre es nun aufgrund der Verschränktheit möglich, einen hermiteschen Operator  $A$  zu finden, sodass  $\text{Tr}(A\rho) < 0$  und  $\text{Tr}(A\sigma) \geq 0$  für jeden beliebigen, separablen Zustand  $\sigma$ . Letztere Bedingung ist aber äquivalent dazu, dass  $\text{Tr}(A(P \otimes Q)) \geq 0$  gilt. Somit ergibt sich ein Widerspruch.  $\square$

Einen solchen Operator  $A$ , dessen Skalarprodukt  $\text{Tr}(A \cdot)$  mit separablen Zuständen positiv und mit verschränkten nicht positiv ist, bezeichnet man auch als Verschränkungszeugen. Dieses Ergebnis muss man nun in die Sprache der positiven Abbildungen übersetzen. Dazu nutzt man einen Isomorphismus zwischen der Menge der Verschränkungszeugen und der Menge der positiven, aber nicht vollständig positiven Abbildung aus. Dann folgt nach [12]:

**Satz 4.2.4.** *Der gemischte Zustand  $\rho$  ist genau dann separabel, wenn für jede beliebige positive Abbildung  $\Lambda \in \mathcal{L}(\mathcal{A}_A, \mathcal{A}_B)$  der Operator  $(\mathbf{1} \otimes \Lambda)\rho$  ebenfalls positiv ist.*

<sup>3</sup>Dieser Satz ist eine Folgerung aus dem Satz von Hahn-Banach und findet sich z.B. explizit in [8] oder in [26].

*Beweis.* Sei  $S(\Lambda)$  ein Isomorphismus<sup>4</sup> zwischen der Menge der linearen Abbildungen  $\Lambda$  und der Menge der Operatoren auf  $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ , der mit einer beliebigen, vorgegebenen Orthonormalbasis  $E_i$  in  $\mathcal{A}_A$  definiert ist als:

$$\mathcal{L}(\mathcal{A}_A, \mathcal{A}_B) \ni \Lambda \rightarrow S(\Lambda) = \sum_i E_i^\dagger \otimes \Lambda(E_i) \in \mathcal{A}_A \otimes \mathcal{A}_B \quad (4.3)$$

Nach [15] ist  $\Lambda$  genau dann positiv, wenn  $S(\Lambda)$  hermitesch ist und  $Tr(S(\Lambda)P \otimes Q) \geq 0$  für beliebige Projektoren  $P, Q$  auf den Teilhilberträumen. Nun wählt man als Basis in  $\mathcal{A}_A$  die Menge der Operatoren  $P_{ij}$  mit der Eigenschaft  $P_{ij}e_l = \delta_{jl}e_i$  für eine festgelegte Basis  $e_i$  in  $\mathcal{H}_A$ . Dann kann man die Gleichung (4.2) wie folgt umschreiben:

$$Tr \left( \left( (\mathbb{1} \otimes \Lambda) \sum_{ij} P_{ji} \otimes P_{ij} \right) \rho \right) \geq 0$$

Sei  $T$  die Transposition, dann gilt  $TP_{ij} = P_{ji}$ .  $T$  ist positiv, sodass auch  $\Lambda T$  positiv ist.

$$Tr \left( \left( (\mathbb{1} \otimes \Lambda T) \sum_{ij} P_{ji} \otimes TP_{ij} \right) \rho \right) \geq 0 \quad (4.4)$$

Mit  $P_0 = \frac{1}{d} \sum_{ij} P_{ji} \otimes P_{ij}$  und  $d$  als Dimension des Hilbertraums  $\mathcal{H}_A$ , kann (4.4) mit Hilfe des Skalarprodukts im Raum der Operatoren dargestellt werden.

$$\langle \rho, ((\mathbb{1} \otimes \Lambda) P_0)^\dagger \rangle \geq 0$$

Da  $P_0$  hermitesch ist und diese Eigenschaft auch unter einer positive Abbildung erhalten bleibt, gilt:

$$\langle \rho, \mathbb{1} \otimes \Lambda P_0 \rangle \geq 0$$

Durch den Übergang zur adjungierten Abbildung erhält man die äquivalente Bedingung für beliebige, positive Abbildungen  $\Lambda$ :

$$\langle (\mathbb{1} \otimes \Lambda) \rho, P_0 \rangle \equiv Tr(P_0 (\mathbb{1} \otimes \Lambda) \rho) \geq 0 \quad (4.5)$$

Ist  $\rho$  ein separabler Zustand, dann ist die Ungleichung (4.5) für positive  $\Lambda$  auf jeden Fall erfüllt. Andererseits ist, wenn  $(\mathbb{1} \otimes \Lambda) \rho$  für beliebiges  $\Lambda$  positiv ist, ist (4.5) auf jeden Fall erfüllt, da  $P_0$  ein Projektor ist. Daher ist der Zustand  $\rho$  dann separabel.  $\square$

Dieser Satz zeigt, dass komplett positive Abbildungen keinen Nutzen bringen für die Untersuchung verschränkter Zustände, da die Bedingung des Satzes von ihnen für beliebige Operatoren erfüllt wird. Aus diesem Satz folgt nun aber direkt, dass PPT ein hinreichendes Kriterium ist.

<sup>4</sup>Dieser Isomorphismus wird nach seinem Entdecker als Jamiolkowski-Isomorphismus bezeichnet.

**Satz 4.2.5.** *Ein gemischter Zustand  $\rho$  in einem  $2 \otimes 2$  oder  $2 \otimes 3$  dimensionalen System ist genau dann separabel, wenn seine partielle Transposition ein positiver Operator ist.*

*Beweis.* In einem System solcher Dimension sind alle positiven Abbildungen zerlegbar. Daher kann man schreiben:

$$(\mathbf{1} \otimes \Lambda)\rho = (\mathbf{1} \otimes \Lambda_1^{CP})\rho + (\mathbf{1} \otimes \Lambda_2^{CP})\rho^{TB} \quad (4.6)$$

Wenn  $\rho$  separabel ist, ist  $\rho^{TB}$  auf jeden Fall positiv. Für die Umkehrung nimmt man nun an, dass  $\rho^{TB}$  positiv ist, dann ist aber auch  $(\mathbf{1} \otimes \Lambda_1^{CP})\rho + (\mathbf{1} \otimes \Lambda_2^{CP})\rho^{TB}$  positiv. Nach Satz 4.2.4 ist  $\rho$  dann separabel.  $\square$

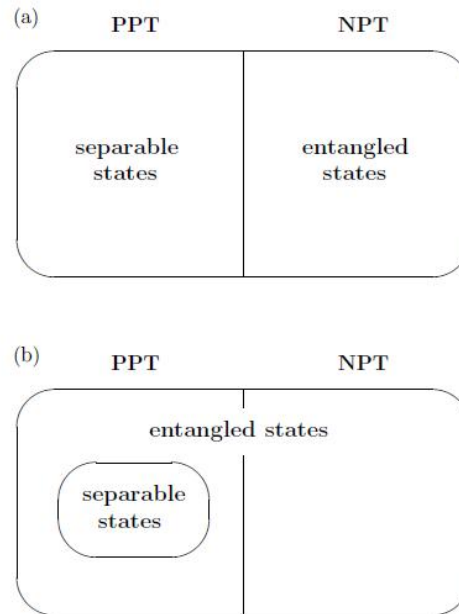


Abbildung 4.1: PPT-Kriterium für niedrig dimensionale Systeme (a) und höher dimensionale Systeme (b), entnommen aus [13]

Die Ergebnisse dieses Kapitels lassen sich anhand von Abbildung 4.1 zusammenfassen: Befindet man sich in einem  $2 \otimes 2$  oder  $2 \otimes 3$  dimensionalen System ist das PPT-Kriterium vollkommen ausreichend zur vollständigen Charakterisierung von Separabilität und Verschränkung. Allerdings besteht in höher dimensionalen Systemen die Möglichkeit, dass ein Zustand zwar PPT ist, aber dennoch verschränkt ist.

### 4.3 Beispiel

Das PPT-Kriterium soll nun hier an einem Beispiel eines  $2 \otimes 2$  Systems vorgerechnet werden. Das betrachtete gemischte Ensemble besteht zu einem relativen Anteil  $p$  aus dem Zustand  $\psi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$  und zu einem Anteil  $(1-p)$  aus dem Zustand  $\psi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$ . Für sich alleine genommen, handelt es sich um zwei reine, verschränkte Zustände, daher würde man erstmal eine Verschränktheit des gemischten Zustands erwarten. Die zugehörige Dichtematrix  $\rho$  hat folgende Gestalt:

$$\rho = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} p & 0 & 0 & p \\ 0 & (1-p) & (1-p) & 0 \\ 0 & (1-p) & (1-p) & 0 \\ p & 0 & 0 & p \end{pmatrix}$$

Nun kann man diese Matrix nach dem oben beschriebenen Verfahren partiell transponieren und erhält:

$$\rho^{TB} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} p & 0 & 0 & (1-p) \\ 0 & (1-p) & p & 0 \\ 0 & p & (1-p) & 0 \\ (1-p) & 0 & 0 & p \end{pmatrix}$$

Nun berechnet man die Eigenwerte von  $\rho^{TB}$ :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -p + \frac{1}{2} \\ \lambda_2 &= p - \frac{1}{2} \\ \lambda_{3,4} &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Da nach Voraussetzung  $0 < p < 1$  gilt, erhalten wir für  $p \neq \frac{1}{2}$  immer einen negativen Eigenwert, sodass unser gemischter Zustand dann NPT ist und somit auf jeden Fall verschränkt ist. Für den Fall  $p = \frac{1}{2}$  sind alle Eigenwerte positiv oder null, sodass unser gemischter Zustand PPT ist. Da wir hier ein  $2 \otimes 2$  System betrachten, handelt es sich auf jeden Fall um einen separablen Zustand, auch wenn er aus einer „gleichen Mischung“ von verschränkten Zuständen besteht.

Ein weiteres Beispiel ist die Überlagerung von  $\psi_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$  mit einem relativen Anteil  $p$  mit dem Zustand  $|11\rangle$  mit einem relativen Anteil  $1-p$ . Daraus erhält man folgende Dichtematrix:

$$\rho = \begin{pmatrix} 1-p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}p & -\frac{1}{2}p & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}p & \frac{1}{2}p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Dann lautet die partiell transponierte Dichtematrix:

$$\rho^{TB} = \begin{pmatrix} 1-p & 0 & 0 & -\frac{1}{2}p \\ 0 & \frac{1}{2}p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}p & 0 \\ -\frac{1}{2}p & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Für diese Matrix findet man die folgenden Eigenwerte:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}\sqrt{1 - 2p + 2p^2} \\ \lambda_2 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}p - \frac{1}{2}\sqrt{1 - 2p + 2p^2} \\ \lambda_{3,4} &= \frac{1}{2}p \end{aligned}$$

Da  $\lambda_2$  nur für  $p = 0$  nicht negativ ist, ist der betrachtete Zustand verschränkt für  $p \neq 0$ . Für  $p = 0$  ist er natürlich separabel, dann es sich dann ja um einen reinen Produktzustand handelt.

## 5 Range-Kriterium

Im letzten Kapitel wurde gezeigt, dass PPT nur im Fall „kleiner Dimensionen“ ein hinreichendes Kriterium für die Verschränktheit von gemischten Zuständen darstellt. Daher muss für höher dimensionale Fälle ein stärkeres Kriterium gefunden werden. Ein solches ist das Range-Kriterium<sup>1</sup> ([14, 13]). Es ist in der Lage, PPT-verschränkte Zustände zu finden.

### 5.1 Herleitung

Zunächst müssen wir definieren, was das Bild überhaupt ist.

**Definition 5.1.1.** Sei  $A$  ein Operator auf dem Hilbertraum  $\mathcal{H}$ , dann ist das *Bild* von  $A$  definiert als  $R(A) = \{A\psi \in \mathcal{H} | \psi \in \mathcal{H}\}$ . Falls  $A$  hermitisch ist, ist das Bild das gleiche wie der Träger von  $A$ , also der Vektorraum, der von den Eigenvektoren von  $A$  mit Eigenwerten ungleich null aufgespannt wird.

Um mit dem Bild arbeiten zu können, benötigt man zunächst einen Darstellungssatz für separable Zustände.

**Lemma 5.1.1.** Sei  $\rho$  ein separabler Zustand auf einem zusammengesetzten Hilbertraum, der aus endlichdimensionalen Teilhilberträumen besteht, dann existiert eine endliche Menge von Projektoren  $P_{\psi_i} \otimes Q_{\phi_k}$ , sodass

$$\rho = \sum_{i,k} p_{ik} P_{\psi_i} \otimes Q_{\phi_k}$$

*Beweis.* Sei  $\rho = \sum_l p_l \rho_l^A \otimes \rho_l^B$  ein beliebiger, gemischter Zustand. Dann lautet seine Spektralzerlegung

$$\sum_{i,k,l} p_l r_{li} P_{\psi_i} \otimes Q_{\phi_k} s_{lk}$$

mit  $P_{\psi_i}, Q_{\phi_k}$  Projektoren und  $r_{ik}, s_{il}$  den entsprechenden Eigenwerten. Die skalaren Faktoren kann man nun zu  $p_{ik} = \sum_l p_l r_{li} s_{lk}$  zusammenfassen und erhält die Behauptung. □

---

<sup>1</sup>„Range“ ist die englische Bezeichnung für das Bild eines Operators. Im Folgenden soll immer die deutsche Bezeichnung „Bild“ verwendet werden.

**Lemma 5.1.2.** *Wenn  $\rho$  ein separabler Zustand auf einem zusammengesetzten Hilbertraum ist, dann gilt für eine beliebige Ensemblezerlegung  $\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$ , dass jeder Vektor  $|\psi_i\rangle$  zum Bild von  $\rho$  gehört.*

*Beweis.* Da  $\rho$  hermitesch ist, ist sein Bild einfach sein Träger, also der Unterraum, der von allen Eigenvektoren mit Eigenwert ungleich null aufgespannt wird. Da die  $|\psi_i\rangle$  aber im Allgemeinen keine Eigenvektoren von  $\rho$  sind, muss noch gezeigt werden, dass sie trotzdem zum Bild von  $\rho$  gehören. Sei nun  $\phi \perp R(\rho)$  beliebig, dann ist  $\langle\phi|\rho|\phi\rangle = 0 = \sum_i p_i \langle\phi|\psi_i\rangle\langle\psi_i|\phi\rangle = \sum_i p_i |\langle\phi|\psi_i\rangle|^2$ . Es gilt aber, dass alle  $p_i > 0$  sind. Daher müssen alle  $|\langle\phi|\psi_i\rangle|^2 = 0$  sein. Der Vektor  $\phi$  wurde beliebig aus dem Orthogonalkomplement des Bildes von  $\rho$  gewählt, sodass  $\psi_i \in R(\rho)$  für alle  $i$  gelten muss.  $\square$

**Satz 5.1.3.** *Falls ein zusammengesetzter Zustand  $\rho$  separabel ist, dann existiert eine Familie von Vektoren  $\psi_i \otimes \phi_k$ , sodass*

1. diese das Bild von  $\rho$  aufspannen
2. die Vektoren  $\psi_i \otimes \overline{\phi_k}$  das Bild von  $\rho^{TB}$  aufspannen

*Beweis.* Aufgrund von Lemma 5.1.1 kann jeder separable Zustand wie folgt geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \rho &= \sum_{i,k} p_{ik} P_{\psi_i} \otimes Q_{\phi_k} \\ &= \sum_{i,k} p_{ik} |\psi_i \otimes \phi_k\rangle\langle\psi_i \otimes \phi_k| \end{aligned}$$

Daher spannen die Vektoren  $\psi_i \otimes \phi_k$  das Bild von  $\rho$  auf. Für eine hermitesche Matrix entspricht die Transposition einfach der komplexen Konjugation der Matrixelemente. Daher erhält man für die partielle Transposition in Teilraum B:

$$\begin{aligned} \rho^{TB} &= \sum_{i,k} p_{ik} P_{\psi_i} \otimes Q_{\phi_k}^T \\ &= \sum_{i,k} p_{ik} |\psi_i \otimes \overline{\phi_k}\rangle\langle\psi_i \otimes \overline{\phi_k}| \end{aligned}$$

Die  $|\psi_i \otimes \overline{\phi_k}\rangle$  spannen aber nun wiederum das Bild von  $\rho^{TB}$  auf.  $\square$

## 5.2 Beispiel

Hier soll nun an einem Beispiel aus [14] gezeigt werden, dass das Range-Kriterium in der Lage ist, PPT-verschränkte Zustände zu finden. Hierzu nehmen wir ein  $3 \otimes 3$ -

System. Sei nun  $e_i$  die Standardbasis im  $\mathbb{C}^3$ , dann benötigen wir zur Konstruktion des zu untersuchenden Zustands folgenden Projektor:

$$Q = 1 \otimes 1 - \left( \sum_{i=1}^3 P_{e_i} \otimes P_{e_i} + P_{e_3} \otimes P_{e_1} \right)$$

Dazu kommen noch zwei Zustände

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{3}} (e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2 + e_3 \otimes e_3)$$

$$\Phi_a = e_3 \otimes \left( \sqrt{\frac{1+a}{2}} e_1 + \sqrt{\frac{1-a}{2}} e_3 \right)$$

Mit dem Projektor auf  $\psi$   $P_\psi$  kann man nun folgenden Zustand  $\rho_{insep} = \frac{3}{8}P_\psi + \frac{1}{8}Q$  definieren. Über das PPT-Kriterium lässt sich nun ausrechnen, dass dieser Zustand verschränkt (NPT) ist. Im folgenden soll aber die Mischung

$$\rho_a = \frac{8a}{8a+1} \rho_{insep} + \frac{1}{8a+1} P_{\Phi_a}$$

betrachtet werden. Von  $\rho_a$  und  $\rho_a^{TB}$  lässt sich nun die Matrixdarstellung wie folgt bestimmen:

$$\rho_a = \begin{pmatrix} \frac{a}{8a+1} & 0 & 0 & 0 & \frac{a}{8a+1} & 0 & 0 & 0 & \frac{a}{8a+1} \\ 0 & \frac{a}{8a+1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a}{8a+1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{a}{8a+1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{a}{8a+1} & 0 & 0 & 0 & \frac{a}{8a+1} & 0 & 0 & 0 & \frac{a}{8a+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{a}{8a+1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1/2+1/2a}{8a+1} & 0 & 1/2 \frac{\sqrt{1-a^2}}{8a+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{a}{8a+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \frac{\sqrt{1-a^2}}{8a+1} & 0 & \frac{1/2+1/2a}{8a+1} \end{pmatrix}$$

$$\rho_a^{TB} = \begin{pmatrix} \frac{a}{8a+1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a}{8a+1} & 0 & \frac{a}{8a+1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a}{8a+1} & 0 & 0 & 0 & \frac{a}{8a+1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a}{8a+1} & 0 & \frac{a}{8a+1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{a}{8a+1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{a}{8a+1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a}{8a+1} & 0 & 0 & 0 & \frac{1/2+1/2a}{8a+1} & 0 & 1/2 \frac{\sqrt{1-a^2}}{8a+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{a}{8a+1} & 0 & \frac{a}{8a+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \frac{\sqrt{1-a^2}}{8a+1} & 0 & \frac{1/2+1/2a}{8a+1} \end{pmatrix}$$

Nun kann man die Eigenwerte von  $\rho_a^{TB}$  berechnen und erhält  $\lambda_{1,2} = 0$ ,  $\lambda_{3,4,5,6} = \frac{a}{8a+1}$ ,  $\lambda_7 = 2 \cdot \lambda_{3,4,5,6}$  und  $\lambda_{8,9} = \frac{1}{2} \frac{2a+1 \pm \sqrt{2a^2-2a+1}}{8a+1}$ . Da  $0 \leq a \leq 1$  ist dieser Zustand auf jeden Fall PPT. Ob dieser separabel ist, lässt sich an dieser Stelle allerdings noch nicht beantworten, da wir uns in einem  $3 \otimes 3$ -System befinden und dort das PPT-Kriterium nicht mehr hinreichend ist. Daher kann man nun schauen, ob das Range-Kriterium bei der Charakterisierung dieses Zustands hilfreich ist. Ordnet man die Basen im Produktraum in der Form  $e_1 \otimes e_1$ ,  $e_1 \otimes e_2$ ,  $e_1 \otimes e_3$ ,  $e_2 \otimes e_1$  usw. an, so stellt man fest, dass jeder Vektor aus dem Bild von  $\rho_a^{TB}$  folgende Darstellung mit  $x = \sqrt{(1+a)(1-a)}$  besitzt:

$$u = (A, B, C, B, D, E, C + F, E, xF) \quad (5.1)$$

Andererseits lässt sich ein Vektor aus dem Bild auch in Produktdarstellung darstellen:

$$u_{prod} = (r, s, t) \otimes (\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}) \quad (5.2)$$

$$= \left( r \begin{pmatrix} \tilde{A} \\ \tilde{B} \\ \tilde{C} \end{pmatrix}, s \begin{pmatrix} \tilde{A} \\ \tilde{B} \\ \tilde{C} \end{pmatrix}, t \begin{pmatrix} \tilde{A} \\ \tilde{B} \\ \tilde{C} \end{pmatrix} \right) \quad (5.3)$$

Zunächst betrachten wir den Fall  $rs \neq 0$ , dann kann man  $r = 1$  setzen und erhält  $\tilde{A} = A$ ,  $\tilde{B} = B$  und  $\tilde{C} = C$ . Jetzt muss man nur noch (5.1) und (5.3) vergleichen und findet folgende weitere Beziehungen:  $B = sA$ ,  $E = sC$ ,  $E = tsA$  oder zusammengefasst  $C = tA$ ,  $xF = tC = t^2A$ ,  $C + F = tA$ . Da aber  $C = tA$  folgt daraus sofort, dass  $F = 0$  und wegen  $xF = tC = t^2A$  dann  $t = 0$ . Daher hat der Vektor folgende Gestalt für  $A \neq 0$  und  $A, s \in \mathbb{C}$ :

$$u_1 = A(1, s, 0) \otimes (1, s, 0) \quad (5.4)$$

Sollte allerdings  $r = 0$  sein, dann:

$$u_{prod} = \left( 0, 0, 0, s \begin{pmatrix} \tilde{A} \\ \tilde{B} \\ \tilde{C} \end{pmatrix}, t \begin{pmatrix} \tilde{A} \\ \tilde{B} \\ \tilde{C} \end{pmatrix} \right)$$

Auf der anderen Seite hat man dann aber auch:

$$u = (0, 0, 0, 0, D, E, F, E, xF)$$

Um die Gleichheit zu gewährleisten kann nun entweder  $s = 0$  und damit auch  $E = 0$  sein, dann erhält man folgenden Vektor:

$$u_2 = F(0, 0, 1) \otimes (1, 0, x) \quad (5.5)$$

Für den Fall  $s \neq 0$  kann man nun  $s = 1$  setzen. Das hat zur Folge, dass es möglich ist  $t = 0$  zu setzen, wodurch man die Bedingungen  $F = E = 0$  und einen weiteren möglichen Vektor erhält.

$$u_3 = D(0, 1, 0) \otimes (0, 1, 0) \quad (5.6)$$

Für  $t \neq 0$  ist dann  $\tilde{A} = 0$  und damit auch  $F = 0$ . Dann muss aber auch  $E = 0$  und  $D = 0$  sein. Somit erhält man für diesen Fall nur den Nullvektor.

Nun sei  $r \neq 0$  und  $s = 0$ . Man setzt wiederum  $r = 1$ ,  $\tilde{A} = A$ ,  $\tilde{B} = B$  und  $\tilde{C} = C$ . Daraus folgt sofort  $B = E = D = 0$ . Das heißt, es verbleibt folgende Gleichung zu lösen:

$$(A, 0, C, 0, 0, 0, t(A, 0, C)) = (A, 0, C, 0, 0, 0, C + F, 0, xF)$$

Für  $t = 0$  sind dann  $C = F = 0$ , sodass man folgenden Vektor bekommt:

$$u_4 = A(1, 0, 0) \otimes (1, 0, 0) \quad (5.7)$$

Setzt man allerdings  $t \neq 0$ , dann ist  $xF = tC$ ,  $C + F = tA$ . Daher ist  $A = (t^{-1} + x^{-1})C$ , sodass als letzter Vektor

$$u_5 = C(1, 0, t) \otimes (t^{-1} + x^{-1}, 0, 1) \quad (5.8)$$

verbleibt. Da diese Vektoren ((5.4),(5.5),(5.6),(5.7),(5.8)) das Bild von  $\rho_a^{TB}$  sollte ihre „partielle komplexe Konjugation“ das Bild  $\rho_a$  aufspannen, wenn der Zustand separabel sein sollte, wie das PPT-Kriterium vermuten lässt. Ihre „partielle komplexe Konjugation“ hat folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} \bar{u}_1^2 &= A(1, s, 0) \otimes (1, \bar{s}, 0) \\ \bar{u}_2^2 &= F(0, 0, 1) \otimes (1, 0, x) \\ \bar{u}_3^2 &= D(0, 1, 0) \otimes (0, 1, 0) \\ \bar{u}_4^2 &= A(1, 0, 0) \otimes (1, 0, 0) \\ \bar{u}_5^2 &= C(1, 0, t) \otimes \left( (\bar{t})^{-1} + x^{-1}, 0, 1 \right) \end{aligned}$$

Diese Vektoren können allerdings nicht das Bild von  $\rho_a$  aufspannen, da sie allesamt orthogonal zu  $\tilde{u} = (0, 0, 1) \otimes (0, 1, 0)$  sind, der zum Bild von  $\rho_a$  gehört. Das heißt, der Zustand verletzt das Range-Kriterium und ist daher für  $a \neq 0$  verschränkt. Man kann sagen, dass  $P_{\Phi_a}$  die Verschränkung durch die Mischung mit  $\rho_{insep}$  für das PPT-Kriterium unsichtbar macht.



## 6 Reduktionskriterium

Aus der Betrachtung von positiven Abbildungen, die in 4.2 behandelt wurden, lässt sich ein weiteres Kriterium für Verschränktheit ableiten. Da es auf den reduzierten Dichtematrizen beruht, wird es als Reduktionskriterium bezeichnet. ([13, 11])

### 6.1 Herleitung

Hierzu nutzt man Satz 4.2.4 aus. Zunächst konstruiert man eine Abbildung  $\Lambda$  der Form:

$$\Lambda(A) = (\text{Tr} A)\mathbb{1} - A$$

Der aus dieser Abbildung resultierende Operator ist positiv, da seine Eigenwerte  $\lambda_i = \text{Tr} A - a_i$  betragen, wenn  $a_i$  die Eigenwerte von  $A$  sind. Wenn  $A$  nun positiv ist, dann gilt  $a_i \geq 0$  und  $\text{Tr} A = \sum_i a_i \geq 0$ , sodass diese Abbildung  $\Lambda$  positiv ist.

Wendet man diese Abbildung und die im Tensorprodukt vertauschte Abbildung  $(\Lambda \otimes \mathbb{1})$  nun auf einen gemischten Zustand  $\rho$ , so erhält man ein weiteres Kriterium für Verschränktheit. Sei  $\rho = \sum_i p_i \rho_i^A \otimes \rho_i^B$  ein separabler Zustand, dann gilt:

$$\begin{aligned} (\Lambda \otimes \mathbb{1})\rho &= (\Lambda \otimes \mathbb{1}) \sum_i p_i \rho_i^A \otimes \rho_i^B \\ &= \sum_i p_i \Lambda(\rho_i^A) \otimes \rho_i^B \\ &= \sum_i p_i (\mathbb{1}_A - \rho_i^A) \otimes \rho_i^B \\ &= \mathbb{1} \otimes \rho_B - \rho \end{aligned}$$

**Satz 6.1.1.** *Sei  $\rho$  ein separabler Zustand und  $\rho_A$  und  $\rho_B$  die reduzierten Dichtoperatoren, dann gilt:*

$$\begin{aligned} \mathbb{1} \otimes \rho_B - \rho &\geq 0 \\ \rho_A \otimes \mathbb{1} - \rho &\geq 0 \end{aligned}$$

Dieses Kriterium bezeichnet man als das Reduktionskriterium. Aus ihm kann man direkt ein weiteres Kriterium ableiten: Hierzu betrachtet man zunächst den verschränkten Zustand eines  $d \otimes d$  Systems

$$\psi_+ = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{i=1}^d |i\rangle \otimes |i\rangle \quad (6.1)$$



Da sich Verschränkung nicht ändert, wenn man das System einer unitären Entwicklung, die in die Teilräume faktorisiert, unterwirft, sind folgende Zustände ebenfalls verschränkt, wenn  $U_1$  und  $U_2$  unitäre Operatoren sind:

$$\psi = (U_1 \otimes U_2) \psi_+ \quad (6.2)$$

Mit diesen Zuständen kann man nun den voll verschränkten Anteil eines Zustandes definieren.

**Definition 6.1.1.** Sei  $\rho$  ein Zustand eines  $d \otimes d$  Systems und  $\psi = (U_1 \otimes U_2) \psi_+$ , dann nennt man  $\mathcal{F}(\rho) = \max_{\psi} \langle \psi | \rho | \psi \rangle$  den *voll verschränkten Anteil* des Zustands.

Sei nun  $\sigma$  ein separabler Zustand und  $\psi_{me}$  ein Zustand der Form (6.2), dann folgt aus den Ungleichungen des Reduktionskriteriums  $\langle \psi_{me} | \sigma_A \otimes 1 - \sigma | \psi_{me} \rangle \geq 0$ . Da aber der reduzierte Dichteoperator des maximal verschränkten Zustands proportional zur Identität ist, erhält man für den Term  $\langle \psi_{me} | \sigma_A \otimes 1 | \psi_{me} \rangle = \text{Tr}(\rho_A^{\psi_{me}} \sigma_A) = \frac{1}{d}$ . Dies kann man nun in die Ungleichung einsetzen und erhält:

$$\langle \psi_{me} | \sigma | \psi_{me} \rangle \leq \frac{1}{d}$$

Da dies für beliebige maximal verschränkte Zustände gilt, folgt daraus sofort ein Separabilitätskriterium.

**Satz 6.1.2.** Sei  $\rho$  ein separabler Zustand auf einem  $d \otimes d$  System, dann gilt  $\mathcal{F}(\rho) \leq \frac{1}{d}$ .

## 6.2 Beispiel

Sei  $\psi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (|00\rangle + |11\rangle)$  und  $\psi_2 = |22\rangle$ . Überlagert man nun diese Zustände mit einem relativen Anteil  $p$  für  $\psi_1$  und  $(1 - p)$  für  $\psi_2$  so hat man ein Beispiel für einen gemischten Zustand in einem  $3 \otimes 3$  System. Dieser Zustand ist NPT und damit verschränkt für  $p \neq 0$ , da ein Eigenwert der partiell transponierten Matrix  $\lambda = -\frac{1}{2}p$  ist. Dennoch kann man diesen Zustand auch weiter mit dem Reduktionskriterium

untersuchen: Berechnet man zum Beispiel  $\rho_A \otimes \mathbb{1} - \rho$ , so erhält man eine  $9 \times 9$ -Matrix, die folgende Gestalt besitzt:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1/2p & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Eigenwerte dieser Matrix sind bis auf einen alle positiv für  $p \neq 0$ , denn auch hier taucht der Eigenwert  $\lambda = -\frac{1}{2}p$  wieder auf, sodass dieser Zustand für  $p \neq 0$  verschränkt und für  $p = 0$  separabel ist, da es sich im letzteren Fall wiederum nur um einen reinen Produktzustand handelt.



## 7 Verschränkungszeugen

Im Kapitel über das PPT-Kriterium klangen bei der Untersuchung, wann und ob es sich um ein hinreichendes Kriterium zur Detektion von Verschränkung handelt, bereits der Begriff des Verschränkungszeugen und der Isomorphismus zwischen positiven Abbildungen und Verschränkungszeugen an. Hier sollen diese bedeutenden Konzepte noch einmal anhand von [6] genauer formalisiert und untersucht werden. Sie werden sich später (siehe Anhang A.4) bei der Klassifizierung von nicht zerlegbaren Abbildungen als nützlich erweisen.

### 7.1 Struktur der Verschränkungszeugen

In diesem Abschnitt werden zunächst mit Hilfe der Schmidtzahl für Dichtematrizen die positiven Kegel der Zustände und der Raum der Verschränkungszeugen charakterisiert. Zwar ist der Schmidtrang eigentlich ein Konzept, das sich nur auf reine Zustände anwenden lässt, allerdings ist die in [25] und [20] gegebene Verallgemeinerung der Schmidtzahl auf die Dichtematrizen ein nützliches Hilfsmittel bei der Untersuchung von Verschränkungszeugen.

**Definition 7.1.1.** Sei  $\rho$  die Dichtematrix eines gemischten Zustands in einem aus zwei Teilsystemen zusammengesetzten System und

$$\rho = \sum_i p_i |\Psi_i^{r_i}\rangle \langle \Psi_i^{r_i}|$$

eine mögliche Zerlegung in reine Zustände, wobei  $r_i$  der Schmidtrang des reinen Zustands  $|\Psi_i^{r_i}\rangle$  ist, dann ist  $SN(\rho)$ , die *Schmidtnummer* von  $\rho$ , definiert als  $SN(\rho) = \min r_{max}$ . Hierbei ist  $r_{max}$  der maximale Schmidtrang innerhalb einer Zerlegung und das Minimum wird über alle möglichen Zerlegungen durchgeführt.

Man kann über die Schmidtnummer einen positiven Kegel der Zustände definieren:

$$V_r = \{\rho \in (M_d \otimes M_d)^+ \mid SN(\rho) \leq r\}, r \in \mathbb{N} \quad (7.1)$$

Aus dieser Definition folgt sofort:

$$V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_d \equiv (M_d \otimes M_d)^+$$

Mit diesen Kegeln lässt sich nun bereits etwas über Separabilität und Verschränktheit von Zuständen aussagen. Der Kegel  $V_1$  besteht aus allen separablen Zustände, während  $V_d \setminus V_1$  eine Menge von verschränkten Zuständen ist.

Die partielle Transposition  $(1_d \otimes T)$  erlaubt es nun ebenfalls, eine weitere Familie von Kegeln zu konstruieren, mit denen man PPT-Zustände charakterisieren kann.

$$V^l = (1_d \otimes T)V_l \quad (7.2)$$

Für diese Kegel gilt wiederum mit  $V^1 \subset \dots \subset V^d$  die gleiche Inklusionskette und  $V_1 = V^1$ . Für die Durchschnittse von (7.1) und (7.2) gilt nun:

$$V_1 = V_1 \cap V^1 \subset V_2 \cap V^2 \subset \dots \subset V_d \cap V^d$$

Hier ist dann  $V_d \cap V^d$  die Menge von Zuständen, die das PPT-Kriterium erfüllen. Nun soll der Raum der Verschränkungszeugen untersucht werden.

**Definition 7.1.2.** Sei  $W \in M_d \otimes M_d$  ein nicht positiver, hermitescher Operator mit  $\text{Tr}(W\rho) \geq 0$  für alle  $\rho \in V_1$ . Dann heißt  $W$  *Verschränkungszeuge*.

Die wesentliche Aussage über einen Verschränkungszeugen wurde zwar schon im Kapitel über das PPT-Kriterium in den Sätzen 4.2.2 und 4.2.3 gezeigt, soll hier aber noch einmal der Übersicht halber in der Formulierung von [24] wiedergegeben werden.

**Satz 7.1.1.** *Ein gemischter Zustand  $\rho$  ist genau dann verschränkt, wenn eine Verschränkungszeuge  $W$  mit  $\text{Tr}(W\rho) \leq 0$  existiert.*

Wir betrachten nun

$$W_r = \{W \in M_d \otimes M_d | \text{Tr}(W\rho) \geq 0, \rho \in V_r\} \quad (7.3)$$

eine Familie von Teilmengen mit  $(M_d \otimes M_d)^+ \equiv W_d \subset \dots \subset W_1$ . Wenn  $k > l$ , dann kann ein Element  $\widehat{W} \in W_l \setminus W_k$  verschränkte Zustände in  $V_k \setminus V_l$  finden.

## 7.2 Dualität zu positiven Abbildungen

In diesem Abschnitt soll kurz dargestellt werden, dass die Kegel der Zustände und der positiven Abbildungen dual zueinander sind und wie man mit Hilfe dieser Eigenschaft überprüfen kann, ob ein Zustand verschränkt bzw. eine positive Abbildung zerlegbar ist.

Wie bereits aus dem Kapitel über das PPT-Kriterium bekannt, sind der Raum der linearen Abbildungen  $\mathcal{L}(M_d, M_d)$  und der Raum der Zustände eines  $d \otimes d$ -Systems aufgrund des Jamiolkowski-Isomorphismus isomorph zueinander. Man kann mit einer Orthonormalbasis  $|i\rangle$  und  $e_{ij} = |i\rangle\langle j|$  den Raum  $\mathcal{L}(M_d, M_d)$  mit einem Skalarprodukt ausstatten: Seien  $\Lambda_1, \Lambda_2 \in \mathcal{L}(M_d, M_d)$ , dann sei das Skalarprodukt definiert als

$$(\Lambda_1, \Lambda_2) = \text{Tr} \left( \sum_{i,j} \Lambda_1(e_{ij})^\dagger \Lambda_2(e_{ij}) \right)$$

Dieses Skalarprodukt ist kompatibel mit dem Hilbert-Schmidt-Skalarprodukt  $(\langle \cdot | \cdot \rangle)$  aus dem Raum der Zustände: Sei  $S$  der Jamiolkowski-Isomorphismus (siehe (4.3)),  $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(M_d, M_d)$  und  $\widehat{\varphi} = S(\varphi), \widehat{\psi} = S(\psi)$ , dann gilt:

$$(\varphi, \psi) = \langle \widehat{\varphi} | \widehat{\psi} \rangle \quad (7.4)$$

Daher definiert der Isomorphismus (4.3) einen unitären Isomorphismus und man erhält für einen Zustand  $\rho$  und eine Abbildung  $\varphi$

$$\langle \rho, \varphi \rangle = \text{Tr} \left( \sum_{i,j} \varphi(e_{ij}) \rho_{ji} \right) \quad (7.5)$$

mit  $\rho = \sum_{i,j} e_{ij} \otimes \rho_{ij}$ .

Nun sei  $P_k$  der konvexe Kegel der  $k$ -positiven<sup>1</sup> Abbildungen und  $P^k$  der konvexe Kegel der  $k$ -kpositiven Abbildungen, dann kann man  $P^r + P^s$  als Menge der Abbildungen definieren, die sich als eine Summe aus einer  $r$ -positiven und einer  $s$ -kpositiven darstellen lassen. Dies bedeutet, eine nicht zerlegbare Abbildungen  $\varphi$  erfüllt  $\varphi \notin P^r + P^s$ . Aus (7.5) folgen nun die Beziehungen

$$\rho \in V_r \Leftrightarrow \langle \rho, \varphi \rangle \geq 0 \quad \forall \varphi \in P^r \quad (7.6)$$

$$\rho \in V_r \cap V^s \Leftrightarrow \langle \rho, \varphi \rangle \geq 0 \quad \forall \varphi \in P^r + P^s \quad (7.7)$$

$$\varphi \in P^r \Leftrightarrow \langle \rho, \varphi \rangle \geq 0 \quad \forall \rho \in V_r \quad (7.8)$$

$$\varphi \in P^r + P^s \Leftrightarrow \langle \rho, \varphi \rangle \geq 0 \quad \forall \rho \in V_r \cap V^s \quad (7.9)$$

Diese Beziehungen lassen sich benutzen, um Verschränkung zu bezeugen. Beispielsweise ist  $\rho$  genau verschränkt, wenn ein  $\varphi \in P^1$  existiert, sodass  $\langle \rho, \varphi \rangle < 0$ . Umgekehrt lässt sich natürlich auch nachprüfen, ob eine Abbildung zerlegbar ist:  $\varphi$  ist genau dann nicht zerlegbar, wenn ein  $\rho \in V_d \cap V^d$  existiert (also ein PPT-Zustand) mit  $\langle \rho, \varphi \rangle < 0$ .

---

<sup>1</sup>Siehe Definition 4.2.2 für die Definition einer  $k$ -positiven Abbildung. Analog heißt eine Abbildung  $\Lambda$  *k-kpositiv*, wenn  $\Lambda \circ T$   $k$ -positiv ist



## 8 Zusammenfassung

Die Grundfrage der Theorie verschränkter Zustände, nämlich ob ein Zustand verschränkt ist oder nicht, ist immer noch eine zu großen Teilen offene Frage, da ein notwendiges und hinreichendes Kriterium nur in wenigen Spezialfällen existiert. In den meisten Fällen stehen bei der Untersuchung von Zuständen auf Verschränktheit nur notwendige Kriterien zur Verfügung.

Die oben genannten „wenigen Spezialfälle“ sind bei der Untersuchung von Zuständen in endlichdimensionalen Hilberträumen aus zwei Teilsystemen die reinen Zustände und die gemischten Zustände in  $2 \otimes 2$ - oder  $3 \otimes 2$ -Systemen: Für den Fall reiner Zustände ist das Kriterium des Schmidtranges notwendig und hinreichend, während für die „niedrig dimensional“ gemischten Systeme das PPT-Kriterium die Funktion eines notwendigen und hinreichenden Kriteriums übernimmt.

Bei höher dimensional Systemen verliert das PPT-Kriterium diese Eigenschaft, da dann nicht mehr alle linearen Abbildungen aus  $\mathcal{L}(\mathcal{A}_A, \mathcal{A}_B)$  zerlegbar sind. Dann ist es nur noch ein notwendiges Kriterium unter vielen anderen, wobei jedes Kriterium verschränkte Zustände nachweisen kann, die andere Kriterien übersehen, wie die Beispiele zeigen. Somit ist die Frage, ob ein Zustand verschränkt ist oder nicht, nun nicht mehr befriedigend zu beantworten: Man kann zwar einen Zustand mit allen bekannten Kriterien testen, allerdings weiß man nicht sicher, dass ein Zustand wirklich separabel ist, selbst wenn alle Kriterien in dem Zustand keine Verschränkung detektieren.

Aufgrund dieser Tatsache lassen sich die verschränkten Zustände höher dimensionaler Systeme in zwei Kategorien zusammenfassen: Einerseits die NPT-verschränkten Zustände, also diejenigen, die durch das PPT-Kriterium als verschränkt nachgewiesen sind, und die PPT-verschränkten Zustände, die vom PPT-Kriterium nicht detektiert werden können. (siehe hierzu Abb. 4.1). Das solche PPT-verschränkten Zustände überhaupt existieren, konnte durch ein Beispiel in Abschnitt 5.2 gezeigt werden.

Da sich aber die PPT-verschränkten Zustände nicht systematisch charakterisieren lassen (es existiert ja kein hinreichendes Kriterium mehr in höher dimensional Systemen), ist selbst für das einfachste denkbare Szenario (ein System aus zwei endlichen Teilhilberträumen) das Problem der Struktur der Verschränkung gemischter Systeme offen.





## A Zerlegbarkeit von positiven Abbildungen

In Kapitel 4 wurde die Zerlegbarkeit der positiven in  $2 \otimes 2$  und  $2 \otimes 3$  Systemen zunächst ohne Beweis angegeben. Im nachfolgenden soll dies anhand der Resultate von [27] nachgeholt werden.

### A.1 Allgemeine Betrachtung

Sei  $\mathcal{H}$  ein endlichdimensionaler Hilbertraum,  $B(\mathcal{H})$  die Menge der Operatoren von  $\mathcal{H}$  nach  $\mathcal{H}$  und  $\mathcal{H}^2 = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ . Ein Operator  $Q \in B(\mathcal{H}^2)$  kann dann als Blockmatrix geschrieben werden:

$$Q = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

Hiersind sind die  $A, B, C$  und  $D$  Operatoren aus  $B(\mathcal{H})$ . Wenn wir nun einen Vektor  $u \in \mathcal{H}^2$  betrachten, kann dieser durch seine Komponenten in  $\mathcal{H}$  als Spaltenvektor dargestellt werden:

$$u = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}$$

Wendet man nun den Operator  $Q$  auf  $u$  an, kann dies einfach als Matrix-Vektor-Produkt geschrieben werden. Als letzte zu betrachtende, wichtige Operation bleibt die blockweise Transposition von  $Q$ . Die blockweise transponierte Matrix  $Q^\tau$  erhält man einfach durch Transposition der oben gegebenen Blockmatrixdarstellung von  $Q$ :

$$Q^\tau = \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}$$

Für die folgende Sätze wird die Definition eines „einfachen Vektors“ sehr wichtig sein.

**Definition A.1.1.** Ein Vektor  $u \in \mathcal{H}^2$  heißt *einfach*, wenn seine Komponenten  $u^1$  und  $u^2$  proportional zueinander sind:  $u^i = \lambda_i x$  mit  $\lambda_i \in \mathbb{C}$  für  $i = 1, 2$ . Nutzt man die Isomorphie  $\mathcal{H} + \mathcal{H} \cong \mathcal{H} \otimes \mathbb{C}^2$  aus, kann man einfache Vektoren mit Produktvektoren identifizieren.

Der nun folgende Satz stellt die Grundlage der von uns benötigten Zerlegbarkeit der positiven Abbildungen dar.

**Satz A.1.1.** *Für einen endlichdimensionalen Hilbertraum  $\mathcal{H}$  sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. Jede positive Abbildung  $\Phi : M_2 \rightarrow B(\mathcal{H})$  ist zerlegbar
2. Für jeden beliebigen Operator  $Q \in \mathcal{H}^2$  mit  $Q \neq 0$ ,  $Q \geq 0$  und  $Q^\tau \geq 0$  existiert ein einfacher Vektor  $u \in \mathcal{H}^2$  mit  $u \neq 0$ , sodass  $u \in \mathcal{Q}(\mathcal{H}^2)$  und  $u^\tau \in \mathcal{Q}^\tau(\mathcal{H}^2)$ .

Die in diesem Satz benutzte Transposition eines einfachen Vektors berechnet sich wie folgt:

$$u = \begin{pmatrix} \lambda_1 x \\ \lambda_2 x \end{pmatrix}$$

$$u^\tau = \begin{pmatrix} \overline{\lambda_1} x \\ \overline{\lambda_2} x \end{pmatrix}$$

Um diesen Satz beweisen zu können, braucht noch ein Lemma über eine Bijektion von der Menge der linearen Abbildungen  $\Phi : M_2 \rightarrow B(\mathcal{H})$  und der Menge der linearen Funktionale auf  $B(\mathcal{H}^2)$ .

**Lemma A.1.2.** Die Abbildung  $\Phi \rightarrow \omega$  mit

$$\omega(Q) = \text{Tr} Q \begin{pmatrix} \Phi \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \Phi \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \Phi \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \Phi \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

1. ist eine Bijektion zwischen der Menge der linearen Abbildungen  $\Phi : M_2 \rightarrow B(\mathcal{H})$  und der Menge der linearen Funktionale  $\omega : B(\mathcal{H}^2) \rightarrow \mathbb{C}$ .
2. ist genau dann positiv, wenn

$$\omega(|u\rangle\langle u|) \geq 0$$

für alle einfachen Vektoren  $u \in \mathcal{H}^2$

3.  $\Phi$  ist eine konvexe Summe von Abbildungen der Form  $a \rightarrow S^\dagger a S$  genau dann, wenn  $\omega(Q) \geq 0$  für alle  $Q \geq 0$
4.  $\Phi$  ist eine konvexe Summe von Abbildungen der Form  $a \rightarrow R^\dagger a^T R$  genau dann, wenn  $\omega(Q) \geq 0$  für alle  $Q \in B(\mathcal{H}^2)$  mit  $Q^\tau \geq 0$

*Beweis.* Auf der einen Seite bestimmt  $\Phi$  eindeutig die Gestalt von  $\omega$ , andererseits kann jedes lineare Funktional durch einen Operator  $F \in B(\mathcal{H}^2)$  mit Hilfe der Spur dargestellt werden:  $\omega(Q) = \text{Tr}(QF)$ . Schreibt man nun  $F$  als Blockmatrix mit den Einträgen  $F_{ij}$  und wählt die Abbildung  $\Phi$  gemäß

$$\Phi \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \alpha F_{11} + \beta F_{12} + \gamma F_{21} + \delta F_{22}$$

so hat man das zu  $\omega$  gehörende  $\Phi$  gefunden, das die Gleichung (A.1) erfüllt.

Die zweite Eigenschaft folgt einfach durch Einsetzen eines Projektors auf einen beliebigen einfachen Vektor in die Formel für  $\omega$ :

$$\omega(|u\rangle\langle u|) = \langle x|\Phi\left(\begin{array}{cc} \lambda_1\bar{\lambda}_1 & \lambda_2\bar{\lambda}_1 \\ \lambda_1\lambda_2 & \lambda_2\lambda_2 \end{array}\right)|x\rangle$$

Da das Argument von  $\Phi$  positiv ist und  $\Phi$  selbst eine positive Abbildung ist, gilt die zweite Eigenschaft für jeden einfachen Vektor. Die Umkehrung folgt ebenfalls, da die Matrizen, im Argument von  $\Phi$  stehen, den Kegel der positiven Matrizen erzeugen.

Die dritte Eigenschaft folgt aus den Eigenschaften linearer Abbildungen  $S : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}^2$ . Jede dieser Abbildungen lässt sich nämlich wie folgt darstellen, wobei  $u \in \mathcal{H}^2$ :

$$Sx = \begin{pmatrix} \langle u^1|x\rangle \\ \langle u^2|x\rangle \end{pmatrix}$$

$$S^\dagger x = \begin{pmatrix} \langle x|u_1\rangle \\ \langle x|u_2\rangle \end{pmatrix}$$

Wenn man nun annimmt, dass  $\Phi(a) = S^\dagger a S$  ist, wobei  $S$  die obige Darstellung besitzt, dann erhält man:

$$\Phi\left(\begin{array}{cc} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{array}\right) = \alpha|u_1\rangle\langle u_1| + \beta|u_1\rangle\langle u_2| + \gamma|u_2\rangle\langle u_1| + \delta|u_2\rangle\langle u_2| \quad (\text{A.2})$$

Nun kann man (A.2) in die Definition von  $\omega(Q)$  einsetzen und bekommt:

$$\omega(Q) = \text{Tr}\left(Q\left(\begin{array}{cc} |u_1\rangle\langle u_1| & |u_1\rangle\langle u_2| \\ |u_2\rangle\langle u_1| & |u_2\rangle\langle u_2| \end{array}\right)\right) = \text{Tr}(Q|u\rangle\langle u|)$$

Dies kann man noch umschreiben zu:

$$\omega(Q) = \langle u|Q|u\rangle$$

Das heißt, wenn  $\Phi$  diese Darstellung als konvexe Summe besitzt, ist  $\omega$  positiv. Für die Umkehrung nimmt man nun an, dass  $\omega(Q) \geq 0$  ist. Dann ist ebenfalls

$$\left(\begin{array}{cc} \Phi\left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right) & \Phi\left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{array}\right) \\ \Phi\left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{array}\right) & \Phi\left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right) \end{array}\right) \geq 0$$

Aufgrund des Spektralsatzes lassen sich nun Vektoren  $u_i \in H^2$  finden, sodass

$$\left(\begin{array}{cc} \Phi\left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right) & \Phi\left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{array}\right) \\ \Phi\left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{array}\right) & \Phi\left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right) \end{array}\right) = \sum_n |u_n\rangle\langle u_n|$$

gilt. Daher ist dann  $\Phi(a) = \sum_n S_n^\dagger a S_n$  mit

$$S_n x = \begin{pmatrix} \langle u_n^1 | x \rangle \\ \langle u_n^2 | x \rangle \end{pmatrix}$$

Der Beweis für die vierte Eigenschaft läuft analog.  $\square$

Fasst man das Ergebnis des Lemmas zusammen, so erhält man eine Dualität zwischen  $B(\mathcal{H}^2)$  und dem Raum der linearen Abbildungen von  $M_2$  nach  $B(\mathcal{H})$ . Dabei ist der Kegel, der durch die positiven Abbildungen erzeugt wird, dual zum Kegel  $W$ , der durch die Projektoren der einfachen Vektoren in  $\mathcal{H}^2$  erzeugt wird. Weiterhin ist der Kegel der Abbildungen der Form, wie sie in der dritten Eigenschaft des Lemmas vorkommen, dual zu

$$V = \{Q \in B(\mathcal{H}^2) | Q \geq 0\}$$

Der Kegel der Abbildungen der Form 4 aus dem Lemma ist dual zu:

$$V^\tau = \{Q \in B(\mathcal{H}^2) | Q^\tau \geq 0\}$$

Das heißt, der Kegel der von den Abbildungen beider Art erzeugt wird, ist dual zu  $V \cap V^\tau$ . Daraus folgt damit eine äquivalente Aussage zur 1. Aussage des Satzes A.1.1:

$$V \cap V^\tau \subset W \tag{A.3}$$

Um Satz A.1.1 zu beweisen, muss man nun zeigen, dass aus (A.3) die zweite Aussage des Satzes folgt und umgekehrt: Für die Hinrichtung sei zunächst  $Q \in \mathcal{H}^2$  mit  $Q \neq 0$ ,  $Q \geq 0$  und  $Q^\tau \geq 0$ . Das bedeutet  $Q \in V \cap V^\tau$ . Nach (A.3) kann  $Q$  wie folgt geschrieben werden, wenn  $u_n$  einfache Vektoren sind:

$$Q = \sum_n |u_n\rangle\langle u_n|$$

Dieses bedeutet aber, dass für alle  $n$  die Bedingungen  $u_n \in Q(\mathcal{H}^2)$  und  $u_n^\tau \in Q^\tau(\mathcal{H}^2)$  erfüllt sind.

Für die Rückrichtung nehme man an, dass  $Q$  ein Extrempunkt von  $V \cap V^\tau$  sei. Das bedeutet, dass  $Q \geq 0$  und  $Q^\tau \geq 0$  ist. Nach der zweiten Aussage des Satzes kann man nun einfache Vektoren  $u \in Q(\mathcal{H}^2)$  und  $u^\tau \in Q^\tau(\mathcal{H}^2)$  finden. Daraus folgt, dass für genügend kleine  $\epsilon > 0$   $Q_1 = Q - \epsilon|u\rangle\langle u| \geq 0$  und  $Q_2 = Q^\tau - \epsilon|u^\tau\rangle\langle u^\tau| \geq 0$  gilt. Das bedeutet allerdings, dass  $Q_1 \in V \cap V^\tau$  ist. Dann kann  $Q$  aber nur extrempunkt sein, wenn  $Q$  proportional zu  $|u\rangle\langle u|$  ist. Das heißt, dass die Extrempunkte von  $V \cap V^\tau$  zu  $W$  gehören, woraus (A.3) folgt. Damit ist nun Satz A.1.1 bewiesen.

## A.2 Der Fall $2 \otimes 2$

Nach der Vorarbeit des letzten Abschnitts ist es nun möglich, sich mit dem ersten konkreten Fall der Zerlegbarkeit zu beschäftigen. Für  $2 \otimes 2$  Systeme muss dabei nur der zweite Teil des Satzes A.1.1 nachgewiesen werden. Das heißt, wir suchen für  $\dim \mathcal{H} = 2$  und beliebiges  $Q \in B(\mathcal{H}^2)$  mit  $Q \neq 0$ ,  $Q \geq 0$  und  $Q^\tau \geq 0$  einen einfachen Vektor  $u \in \mathcal{H}^2$  mit  $u \neq 0$  und  $u \in Q(\mathcal{H}^2)$  und  $u^\tau \in Q^\tau(\mathcal{H}^2)$ .

Hierzu kann man zunächst einen Spezialfall betrachten.

**Lemma A.2.1.** *Sei*

$$Q_1 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & B \\ B^\dagger & C \end{pmatrix}$$

mit  $B, C \in B(\mathcal{H})$  und  $\mathbb{1}$  als Identität. Sei nun  $Q_1 \geq 0$  und  $Q_1^\tau \geq 0$ , dann existiert eine komplexe Zahl  $t \in \mathbb{C}$  und ein Vektor  $z \in \mathcal{H}$  mit  $z \neq 0$ , sodass

$$\begin{pmatrix} z \\ \bar{t}z \end{pmatrix} \in Q_1(\mathcal{H}^2)$$

und

$$\begin{pmatrix} z \\ tz \end{pmatrix} \in Q_1^\tau(\mathcal{H}^2)$$

*Beweis.* Für beliebige  $x, y \in \mathcal{H}$  gilt

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & B \\ B^\dagger & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \|x + By\|^2 + \langle y | C - B^\dagger B | y \rangle$$

Daher lässt sich die Positivität von  $Q$  und  $Q^\tau$  zurückführen auf:

$$C - B^\dagger B \geq 0 \tag{A.4}$$

$$C - BB^\dagger \geq 0 \tag{A.5}$$

Die Existenz eines einfachen Vektors mit den in dem Lemma geforderten Eigenschaften folgt aus der Orthogonalitätsbedingung  $z \perp \mathcal{H}_t$ , wobei  $\mathcal{H}_t$  der Unterraum von  $\mathcal{H}$  ist, der durch  $(B - t\mathbb{1}) \ker(C - B^\dagger B)$  und  $(B - t\mathbb{1})^\dagger \ker(C - BB^\dagger)$  aufgespannt wird. Das bedeutet für den Vektor  $z$ :

$$\begin{aligned} z &\perp (B - t\mathbb{1}) \ker(C - B^\dagger B) \\ z &\perp (B - t\mathbb{1})^\dagger \ker(C - BB^\dagger) \end{aligned}$$

Die erste der letzten beiden Bedingungen ist äquivalent zu  $(B - t\mathbb{1})^\dagger z \perp \ker(C - B^\dagger B)$ . Da für hermitesche Operatoren das Orthogonalkomplement des Kerns mit dem Bild übereinstimmt, existiert ein  $y \in \mathcal{H}$  mit der Eigenschaft

$$(B - t\mathbb{1})^\dagger z = (C - B^\dagger B) y$$

Daraus erhält man:

$$\begin{pmatrix} z \\ \bar{t}z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & B \\ B^\dagger & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z + By \\ -y \end{pmatrix}$$

Um den Beweis des Lemmas zu vollenden, muss nur noch gezeigt werden, dass ein  $t \in \mathbb{C}$  existiert mit  $\dim \mathcal{H}_t < 2$ . Sei nun  $n_+$  die Dimension von  $\ker(C - B^\dagger B)$  und  $n_-$  die Dimension von  $\ker(C - BB^\dagger)$ . Man kann nun annehmen, dass z.B.  $n_+ = 2$  also maximal ist. Dann ist  $C - B^\dagger B = 0$  und ebenfalls  $\text{Tr}(C - BB^\dagger) = \text{Tr}(C - B^\dagger B) = 0$ . Da aber  $C - BB^\dagger$  positiv sein soll, muss  $C - BB^\dagger = 0$  gelten. Man kann genauso gut in der Rückrichtung vorgehen mit  $n_-$  maximal und erhält:

$$n_+ = 2 \Leftrightarrow n_- = 2$$

Betrachtet man nun den Fall, dass  $n_+ + n_- \leq 1$ , dann ist die Forderung an die Dimension von  $\mathcal{H}_t$  auf jeden Fall erfüllt. Für den Fall, dass  $n_+ + n_- = 2$  ist, gilt  $n_+ = n_- = 1$ . In diesem Fall ist z.B.  $e$  eine Basis von  $\ker(C - B^\dagger B)$  und  $f$  eine Basis von  $\ker(C - BB^\dagger)$ . Dann wird  $\mathcal{H}_t$  aufgespannt von  $e(t) = (B - t1)e$  und  $f(t) = (B - t1)^\dagger f$ . Sei nun  $w(t) = \det(e(t), f(t))$ . Wenn diese Determinante nun eine Nullstelle in  $t$  besitzt, so sind die beiden Vektoren linear abhängig und  $\dim \mathcal{H}_t < 2$  ist dann erfüllt. Das Polynom hat als höchste Ordnung  $t^2 \bar{t}^2$ , sodass das von Woronowicz in [27] angeführte topologische Argument für den Fall  $3 \otimes 2$ , das bei höchster Ordnung  $t^n \bar{t}^l$  mit  $n \neq l$  die Existenz einer Nullstelle garantiert, nicht mehr anwendbar ist. Allerdings kann durch Berechnen der Nullstellen mit Maple für eine beliebige Matrix  $B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$  gezeigt werden, dass  $t = \frac{B_4}{2} + \frac{B_1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{B_4^2 - 2B_1B_4 + B_1^2 + 4B_2B_3}$  auf jeden Fall eine Nullstelle der Determinante ist. Der Fall für maximales  $n_+$  und  $n_-$  ist wiederum der gleiche wie beim  $2 \otimes 3$  System, der in [27] erläutert ist.  $\square$

Sei nun

$$Q = \begin{pmatrix} A & B \\ B^\dagger & C \end{pmatrix}$$

mit  $A \geq 0$  ein allgemeiner, hermitescher Operator. Im folgenden soll gezeigt werden, dass auch für jeden dieser Operatoren  $Q \geq 0$ ,  $Q^\tau \geq 0$  und  $u \in Q(\mathcal{H}^2)$  und  $u^\tau \in Q^\tau(\mathcal{H}^2)$  erfüllt ist. Dazu müssen lediglich zwei Fälle unterschieden werden: Falls  $A$  umkehrbar ist, dann kann der Fall leicht auf das eben dargestellte Lemma zurückgeführt werden:

$$Q_1 = \begin{pmatrix} A^{-1/2} & 0 \\ 0 & A^{-1/2} \end{pmatrix} Q \begin{pmatrix} A^{-1/2} & 0 \\ 0 & A^{-1/2} \end{pmatrix}$$

Dieses  $Q_1$  erfüllt alle Bedingungen des Lemmas, sodass ein einfacher Vektor  $u_1 \in \mathcal{H}^2$  existiert mit  $u_1 \in Q_1(\mathcal{H}^2)$  und  $u_1^\tau \in Q_1^\tau(\mathcal{H}^2)$ . Betrachtet man nun

$$u = \begin{pmatrix} A^{1/2} & 0 \\ 0 & A^{1/2} \end{pmatrix} u_1$$

so sieht man, dass dieser Vektor alle Anforderungen von Satz A.1.1 erfüllt.

Falls  $A$  nicht invertierbar sein sollte, ist das Problem komplizierter. Sei  $H_0 = A(\mathcal{H})$  und  $P_1$  die Projektion auf  $\mathcal{H}_0^\perp$ . Es gilt:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Q \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & P_1 B \\ B^\dagger P_1 & C \end{pmatrix} \geq 0 \\ \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Q^\tau \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & P_1 B^\dagger \\ B P_1 & C \end{pmatrix} \geq 0 \end{aligned}$$

Hieraus folgt, dass alle Einträge der beiden, gerade berechneten Matrizen bis auf  $C$  null sind. Sei nun  $C P_1 \neq 0$ , dann existiert ein  $x \perp \mathcal{H}_0$  mit  $Cx \neq 0$ . Dann gilt weiterhin:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 \\ Cx \end{pmatrix} &= Q \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ Cx \end{pmatrix} &= Q^\tau \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Damit erfüllt der Vektor  $u = u^\tau = \begin{pmatrix} 0 \\ Cx \end{pmatrix}$  unsere Anforderungen. Daher kann man  $C P_1 = P_1 C = 0$  annehmen. Das heißt dann, alle Operatoren wirken nur auf  $\mathcal{H}_0$  mit  $\dim \mathcal{H}_0 < 2$ . Damit ist das Problem gelöst. Für  $2 \otimes 3$  findet sich der analoge Beweis in [27].

### A.3 Gegenbeispiele

Für höherdimensionale Fälle existieren eine Reihe von Gegenbeispielen: Für den Fall  $3 \otimes 3$  wird in [4] zum ersten Mal ein Gegenbeispiel konstruiert. Dieses lässt sich nach [6] wie folgt verallgemeinern: Sei  $a, b, c \geq 0$   $|i\rangle$  eine Orthonormalbasis des zugrunde liegenden Hilbertraums und  $e_{ij} = |i\rangle\langle j|$ , dann definieren wir eine Abbildung  $\Phi : M_3 \rightarrow M_3$  wie folgt:

$$\begin{aligned} \Phi[a, b, c](e_{ii}) &= \sum_{i,j=1}^3 a_{ij} e_{jj} \\ \Phi[a, b, c](e_{ij}) &= -\frac{1}{a+b+c} e_{ij} \end{aligned}$$

Hier sind die Matrixelemente  $a_{ij}$  wie folgt definiert:

$$a_{ij} = \frac{1}{a+b+c} \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

Die von Choi gefundenen Beispiele lassen sich auf die Fälle  $\Phi[1, 1, 0]$  und  $\Phi[1, 0, \mu]$  mit  $\mu \geq 1$ . Nun lässt sich zeigen, dass die Abbildung  $\Phi[a, b, c]$  im allgemeinen nicht zerlegbar ist, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind.



1.  $0 \leq a \leq 2$
2.  $a + b + c \geq 2$
3.  $(1 - a)^2 \leq bc < (2 - a)^2/4$  für  $0 \leq a \leq 1$
4.  $0 \leq bc < (2 - a)^2/4$  für  $1 \leq a < 2$

Der Beweis dieser Eigenschaft findet sich in [3]. Ein weiteres Beispiel, das aus [18] stammt und eine nicht zerlegbare Abbildung für den Fall  $d \otimes d$  mit  $d \geq 3$  konstruiert, funktioniert wie folgt. Eine Klasse von Abbildungen  $\phi_p$  wird durch  $d + 1$  Parameter  $p = (p_0, p_1, \dots, p_d)$  beschrieben:

$$\begin{aligned}\phi_p(e_{11}) &= p_0 e_{11} + p_d e_{dd} \\ \phi_p(e_{22}) &= p_0 e_{22} + p_1 e_{11} \\ &\vdots \\ \phi_p(e_{dd}) &= p_0 e_{dd} + p_{d-1} e_{d-1, d-1} \\ \phi_p(e_{ij}) &= -e_{ij}\end{aligned}$$

Wenn der Vektor  $p$  der Parameter nun die folgenden Bedingungen erfüllt, so ist diese Abbildung nicht zerlegbar:

1.  $p_1, \dots, p_d > 0$
2.  $d - 1 > p_0 \geq d - 2$
3.  $p_1 \cdot \dots \cdot p_d \geq (d - 1 - p_0)^d$

Neben diesen umfangreichen Klassen von Beispielen lässt sich auch analog zu dem Vorgehen von Woronowicz in [27] ein Gegenbeispiel für  $2 \otimes 4$  konstruieren. Das vom ihm selbst in diesem Artikel gegebene Gegenbeispiel ist allerdings falsch, da seine Matrizen  $Q$  und  $Q^\tau$  nicht positiv sind. Auch die Vermutung, dass es sich um einen Druckfehler handelt, ließ sich durch systematisches Ändern der Matrixeinträge nicht bestätigen. Daher folgt hier nun ein analoges Gegenbeispiel, das die gleiche Vorgehensweise benutzt. Die Matrizen  $Q$  und  $Q^\tau$  seien wiederum wie folgt konstruiert.

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & B \\ B^\dagger & C \end{pmatrix}$$

$$Q^\tau = \begin{pmatrix} 1 & B^\dagger \\ B & C \end{pmatrix}$$

Für das Beispiel wählt man die Matrizen  $B, C$  in  $Q$ , sodass

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Mit dieser Wahl sind sowohl  $Q$  als auch  $Q^T$  positiv und sie besitzen jeweils die gleichen Eigenwerte und einen dreidimensionalen Kern. Wenn nun die einfachen Vektoren  $u$  und  $u^T$  im Bild von  $Q$  bzw.  $Q^T$  liegen sollen, müssen sie orthogonal zum Kern sein, da  $Q$  und  $Q^T$  hermitesch sind. Sei nun  $u = (s \cdot a, s \cdot b, s \cdot c, s \cdot d, t \cdot a, t \cdot b, t \cdot c, t \cdot d)$  und  $u^T$  entsprechend der gleiche Vektor mit komplex konjugiertem  $s, t$ , dann führt die Bedingung, dass  $u$  senkrecht auf dem Kern  $Q$  stehen soll, auf folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} -\bar{s}b + \bar{t}c &= 0 \\ -\bar{s}a + \bar{t}b &= 0 \\ -\bar{s}c - \frac{1}{2}\bar{t}a\sqrt{2} + \bar{t}d &= 0 \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem hat die Lösung

$$\begin{aligned} b &= \frac{s}{t}a \\ c &= \frac{s^2}{t^2}a \\ d &= \frac{1}{2} \frac{2s^3 + t^3\sqrt{2}}{t^3}a \end{aligned}$$

mit den Parametern  $a, s, t$ . Die gleiche Rechnung führt man nun mit der Bedingung, dass  $u^T$  senkrecht auf dem Kern von  $Q^T$  stehen soll durch. Man erhält dann folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} s\bar{b}\sqrt{2} - t\bar{a}\sqrt{2} + t\bar{d} &= 0 \\ -s\bar{c} + t\bar{b} &= 0 \\ -s\bar{d} + t\bar{c} &= 0 \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem hat die Lösung

$$b = 2 \frac{\sqrt{ts^2}}{2s^3 + t^3\sqrt{2}} a$$

$$c = \sqrt{2} \frac{t^2 s}{\sqrt{2}s^3 + t^3} a$$

$$d = \sqrt{2} \frac{t^3}{\sqrt{2}s^3 + t^3} a$$

mit den Parametern  $a, s, t$ . Man erkennt sofort, dass die Lösungen eine vollkommen andere Struktur haben und sich vor allen Dingen nicht durch komplexe Konjugation ihrer Vorfaktoren in einander überführen lassen. Daher ist  $Q$  nicht zerlegbar.

#### A.4 Beweis und Klassifizierung von Gegenbeispielen

Bis auf das selbst analog zu [27] konstruierte Beispiel sind ja bisher alle Beispiele für nicht zerlegbare Abbildungen ohne direkten Beweis genannt worden. Das soll hier durch eine Verallgemeinerung auf eine größere Klasse von Gegenbeispielen, wie sie in [6] dargestellt wird, nachgeholt werden. Hierzu definieren wir folgende Klasse von Abbildungen  $\varphi : M_d \rightarrow M_d$

$$\varphi(e_{ii}) = \sum_{j=1}^d a_{ij} e_{jj}$$

$$\varphi(e_{ij}) = -\frac{1}{d-1} e_{ij}$$

mit  $(a_{ij})$  als reelle, positive  $d \times d$  Matrix.

**Satz A.4.1.** *Sei  $\varphi$  eine Abbildung, die wie oben definiert ist, und ihre zugehörige Matrix  $(a_{ij})$  von der Gestalt*

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{d-1} \\ \alpha_{d-1} & \alpha_0 & \alpha_1 & \dots & \alpha_{d-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_0 \end{pmatrix}$$

mit  $\alpha_i \geq 0$  und  $\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_{d-1} = 1$ . Eine solche Matrix nennt man auch „Zirkulante“. Sie ist „bistochastisch“, das heißt, die Zeilen- bzw. Spaltensummen sind alle gleich eins. Dann ist  $\varphi$  nicht zerlegbar, wenn

- für  $d = 2k + 1$  die Bedingungen

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_k > 0$$

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_k \neq \alpha_{k+1} + \dots + \alpha_{2k}$$

oder die Bedingungen

$$\begin{aligned}\alpha_1 + \dots + \alpha_k &= 0 \\ 1 > \alpha_0 > 0\end{aligned}$$

erfüllt sind.

- für  $d = 2k$  die Bedingungen

$$\begin{aligned}\alpha_1 + \dots + \alpha_{k-1} &> 0 \\ \alpha_1 + \dots + \alpha_{k-1} &\neq \alpha_{k+1} + \dots + \alpha_{2k-1}\end{aligned}$$

oder die Bedingungen

$$\begin{aligned}\alpha_1 + \dots + \alpha_{k-1} &= 0 \\ 1 > \alpha_0 + \alpha_k > 0\end{aligned}$$

erfüllt sind.

*Beweis.* Um zu zeigen, dass  $\varphi$  nicht zerlegbar ist, nutzen wir die Ergebnisse von Kapitel 7 aus: Wenn es möglich ist, einen PPT-Zustand  $\rho$  zu konstruieren, der  $\langle \varphi, \rho \rangle < 0$  erfüllt, dann ist  $\varphi$  nicht zerlegbar. In [5] wurde folgender Zustand betrachtet (die  $e_{ij}$  sind hierbei genauso definiert wie in Kapitel 7):

$$\rho = \sum_{i,j}^d A_{ij} e_{ij} \otimes e_{ij} + \sum_{i \neq j} D_{ij} e_{ii} \otimes e_{jj}$$

Dieser Zustand ist positiv, wenn die hermitesche Matrix  $(A_{ij}) \geq 0$  und alle  $D_{ij} \geq 0$ .  $\rho$  ist PPT, wenn

$$D_{ij} D_{ji} - |A_{ij}| \geq 0 \tag{A.6}$$

für alle  $i \neq j$  erfüllt ist. Nehmen wir nun  $d = 2k + 1$  an, setzen  $A_{ij} = a > 0$  und

$$\begin{aligned}D_{i,i+1} &= D_{i,i+2} = \dots = D_{i,i+k} = a^2 \\ D_{i,i+k+1} &= D_{i,i+k+2} = \dots = D_{i,i+2k} = 1\end{aligned}$$

mit Addition modulo  $d$ , dann ist die Bedingung (A.6) auf jeden Fall erfüllt. Nun kann man das Skalarprodukt zu  $\langle \varphi, \rho \rangle = d \cdot F(a)$  mit

$$F(a) = -a(1 - \alpha_0) + a^2(\alpha_1 + \dots + \alpha_k) + (\alpha_{k+1} + \dots + \alpha_{2k})$$

berechnen. Wenn nun  $\alpha_1 + \dots + \alpha_k > 0$  gilt, erreicht die Funktion  $F$  ihr Minimum bei

$$a_0 = \frac{1 - \alpha_0}{2(\alpha_1 + \dots + \alpha_k)}$$

und die Funktion hat an dieser Stelle den Wert

$$F(a_0) = -\frac{[(\alpha_1 + \dots + \alpha_k) - (\alpha_{k+1} + \dots + \alpha_{2k})]^2}{4(\alpha_1 + \dots + \alpha_k)}$$

Dies bedeutet, dass für  $\alpha_1 + \dots + \alpha_k \neq \alpha_{k+1} + \dots + \alpha_{2k}$  auf jeden Fall  $\langle \varphi, \rho \rangle < 0$  gilt. Sei nun  $\alpha_1 + \dots + \alpha_k = 0$  und damit  $\alpha_{k+1} + \dots + \alpha_{2k} = 1 - \alpha_0$ , dann ist

$$F(a) = (1 - a)(1 + \alpha_0)$$

Daher ist  $F(a) < 0$  genau dann, wenn  $a > 1$  und  $1 > \alpha_0 > 0$ . Eine ähnliche Konstruktion lässt sich auch für  $d = 2k$  finden.  $\square$

## Abbildungsverzeichnis

1.1	EPR-Experiment nach Bohm . . . . .	1
3.1	Die Blochkugel. Auf ihrer Oberfläche liegen die reinen und in ihrem inneren die gemischten Zustände eines zweidimensionalen Systems .	15
4.1	PPT-Kriterium für niedrig dimensionale Systeme (a) und höher dimensionale Systeme (b), entnommen aus [13] . . . . .	22



## Literaturverzeichnis

- [1] J. Audretsch. *Verschränkte Systeme*. Wiley-VCH, Weinheim, 2005.
- [2] D. Bohm. *Quantum Theory*. Prentice-Hall, 1951.
- [3] S.J. Cho, S.-H. Kye, and S.G. Lee. Generalized choi maps in three-dimensional matrix algebra. *Linear Algebra and Its Applications*, 171:213, 1992.
- [4] M. D. Choi. Positive semidefinite biquadratic forms. *Linear Algebra and Its Applications*, 12(2):95–100, 1975.
- [5] D. Chruscinski and A. Kossakowski. A new class of states with positive partial transposition. *Physical Review A*, 74:022308, 2006.
- [6] D. Chruscinski and A. Kossakowski. On the structure of entanglement witnesses and new class of positive indecomposable maps. *Open Systems & Information Dynamics*, 14(3):275–294, 2007.
- [7] F. Deutsch. *Best Approximation in Inner Product Spaces*. Springer, 2001.
- [8] R.E. Edwards. *Functional analysis, theory and application*. Holt, Rinehart and Winston, 1965.
- [9] A. Einstein, B Podolsky, and N. Rosen. Can quantum mechanical description of physical reality be considered complete? *Physical Review*, 47:777, 1935.
- [10] S. J. Freedman and J. F. Clauser. Experimental test of local hidden-variable theories. *Physical Review Letters*, 28(14):938–&, 1972.
- [11] M. Horodecki and P. Horodecki. Reduction criterion of separability and limits for a class of distillation protocols. *Physical Review A*, 59(6):4206–4216, 1999.
- [12] M. Horodecki, P. Horodecki, and R. Horodecki. Separability of mixed states: Necessary and sufficient conditions. *Physics Letters A*, 223(1-2):1–8, 1996.
- [13] M. Horodecki, P. Horodecki, and R. Horodecki. Mixed-state entanglement and quantum communication. In *Quantum Information: An Introduction to Basic Theoretical Concepts and Experiments*. Springer Tracts in Modern Physics, 2001.
- [14] P. Horodecki. Separability criterion and inseparable mixed states with positive partial transposition. *Physics Letters A*, 232:333–339, 1997.
- [15] A. Jamiolkowski. Linear transformations which preserve trace and positive semidefiniteness of operators. *Reports on Mathematical Physics*, 3(4):275–278, 1972.



- 
- [16] C. A. Kocher and E. D. Commins. Polarization correlation of photons emitted in an atomic cascade. *Physical Review Letters*, 18(15):575–578, 1967.
- [17] K. Kraus. *States, effects, and operations : fundamental notions of quantum theory ; lectures in mathematical physics at the University of Texas at Austin*. Lecture Notes in Physics. Springer, 1983.
- [18] H. Osaka. A class of extremal positive maps in 3x3 matrix algebras. *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences*, 28(5):747–756, 1992.
- [19] A. Peres. Separability criterion for density matrices. *Physical Review Letters*, 77(8):1413–1415, 1996.
- [20] A. Sanpera, D. Bruss, and M. Lewenstein. Schmidt-number witnesses and bound entanglement. *Physical Review A*, 63(5), 2001.
- [21] E. Schrödinger. *Naturwissenschaften*, 35:807, 1935.
- [22] F. Schwabl. *Quantenmechanik - Eine Einführung*. Springer, 2007.
- [23] E. Stormer. Positive linear maps of operator algebras. *Acta Mathematica*, 110(3-4):233–278, 1963.
- [24] B. M. Terhal. Bell inequalities and the separability criterion. *Physics Letters A*, 271(5-6):319–326, 2000.
- [25] B. M. Terhal and P. Horodecki. Schmidt number for density matrices. *Physical Review A*, 6104(4), 2000.
- [26] D. Werner. *Funktionalanalysis*. Springer, 6 edition, 2007.
- [27] S. L. Woronowicz. Positive maps of low dimensional matrix algebras. *Reports on Mathematical Physics*, 10(2):165–183, 1976.

**Eidesstattliche Erklärung**

Hiermit erkläre ich an Eides statt, dass ich diese Arbeit selbstständig und ohne fremde Hilfe verfasst habe und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel und Quellen benutzt habe. Ich habe zuvor noch keine Bachelorprüfung der Fachrichtung Physik abgelegt.

Osnabrück, den 20. April 2009

---

Hendrik Niemeyer