Bearbeitungszeit: 60 Minuten.

- 3 ECTS-Punkte: Für das Bestehen sind mindestens 33 Punkte erforderlich.

- 9 ECTS-Punkte: Für das Bestehen sind in der Summe mindestens 99 Punkte in beiden Teilklausuren erforderlich.

Viel Erfolg!

1 Matrizen und Vektoren

1.1

Geben Sie für die folgenden Matrizen an, ob die zur Auswahl gestellten Eigenschaften zutreffen (Mit "Ja"=+ oder "Nein"=−):

Eigenschaft	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$	Fourier-Matrix $\mathcal{F}_2$
symmetrisch				
antisymmetrisch				
hermitesch				
antihermitesch				
unitär				
invertierbar				

Eigenschaft	Pauli-Matrix σ_x	Pauli-Matrix σ_y	Pauli-Matrix σ_z	Fourier-Matrix $\mathcal{F}_N$, $N > 2$
symmetrisch				
antisymmetrisch				
hermitesch				
antihermitesch				
unitär				
invertierbar				

Bei falschen Antworten gibt es einen entsprechenden Punkteabzug. Daher ist ein wahlloses Ankreuzen nicht zu empfehlen !

(24 Punkte)

1.2

Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$ und überprüfen Sie, ob man ihre Determinante und ihre Spur durch die Eigenwerte ausdrücken kann!

(15 Punkte)

1.3

1.3.1

Konstruieren Sie eine ONB (e_1, e_2, e_3) mit $e_1 = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -i \end{pmatrix}$! (15 Punkte)

1.3.2

Transformieren Sie den Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ in diese ONB !

(10 Punkte)

1.3.3

Transformieren Sie die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ in diese ONB !

(20 Punkte)

1.4

Beweisen Sie folgende Äquivalenz für eine $N \times N-$ Matrix A:
$A = A^* = A^{-1} \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{2}(A + E_N)$ ist Projektor. (25 Punkte)

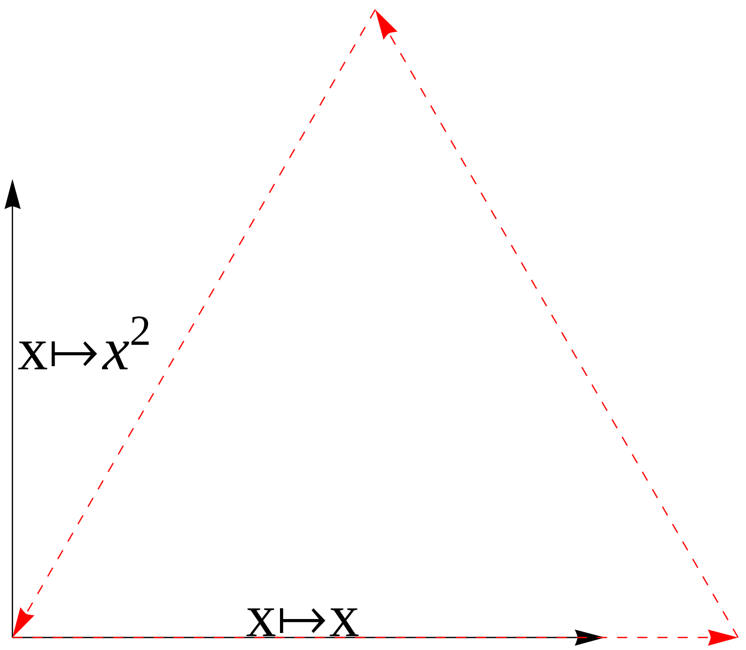

Figure 1: Gleichseitiges Dreieck im Funktionenraum, siehe Aufgabe 2.1.

2 Funktionen als Vektoren

2.1

Konstruieren Sie ein gleichseitiges Dreieck mit der Kantenlänge 1 im Raum der Funktionen
$x \mapsto x$ und $x \mapsto x^2$, siehe Figur 1! Dabei ist das Standard-Skalarprodukt mit $[a, b] = [-1, 1]$ zu Grunde gelegt. (20 Punkte)

2.2

Im Raum der Polynome vom Grade ≤ 3 mit dem Skalarprodukt $\langle p|q\rangle = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \overline{p(x)}\, q(x)\, dx$ bilden die Funktionen
$(1,\, \sqrt{3}\,x,\, \frac{1}{2}\sqrt{5}\,(-1+3x^2),\, \frac{1}{2}\sqrt{7}\,x(-3+5x^2))$ bekanntlich eine ONB. Berechnen Sie die Matrix des Operators $\frac{d}{dx}$ in dieser ONB! (25 Punkte)

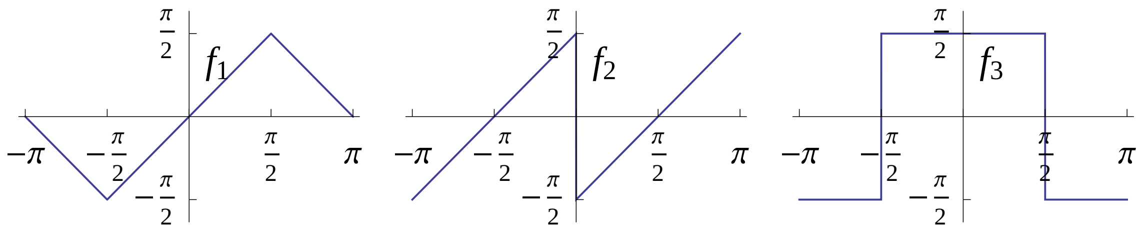

Figure 2: Drei Funktionen f_1, f_2 und f_3, siehe Aufgabe 3.2.

3 Fouriertransformationen

3.1

Für die Fouriermatrix $\mathcal{F}_N$ gilt stets die Gleichung $\mathcal{F}_N^4 = E_N$. Welche Eigenwerte kommen daher für $\mathcal{F}_N$ in Betracht ?

(10 Punkte)

3.2

Gegeben sind drei mögliche Fourierreihen für die Funktionen f_1, f_2 und f_3, siehe Figur 2:

$$f_1(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\sin(2n+1)x, \tag{1}$$

$$f_2(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\sin(2n+1)x, \tag{2}$$

$$f_3(x) = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\cos(2n+1)x\ . \tag{3}$$

Welche dieser Fourierreihen sind korrekt, welche nicht? Geben Sie bei negativen Antworten eine Begründung an !

(30 Punkte)